I. megoldás.

$$2^{2k+3}+3^{k+2}\cdot 7^k=8\cdot 2^{2k}+9\cdot 3^k\cdot 7^k=8\cdot 4^k+(9+8)3^k\cdot 7^k-8\cdot 3^k\cdot 7^k=$$
$$=17\cdot 21^k-8\cdot(21^k-4^k).$$

A különbség első tagja osztható 17-tel, a második tagja pedig osztható a hatványalapok különbségével, $21-4=17$-tel. Így az eredeti kifejezés is osztható 17-tel minden k természetes szám esetén.

II. megoldás. (Teljes indukcióval.) $k=0$-ra a kifejezés értéke 17. Legyen $k>0$, és tegyük fel, hogy $2^{2k+3}+3^{k+2}\cdot 7^k$ osztható 17-tel.

Ekkor
$$\underbrace{2^{2k+5}}_{4\cdot 2^{2k+3}}+\underbrace{3^{k+3}\cdot 7^{k+1}}_{(3\cdot 7)\cdot 3^{k+2}\cdot 7^k}=4\cdot\left(2^{2k+3}+3^{k+2}\cdot 7^k\right)+17\cdot 3^{k+2}7^k.$$

A zárójelben lévő tag az indukciós feltevés miatt osztható 17-tel, tehát $k+1$-re is teljesül az oszthatóság.

Így $2^{2k+3}+3^{k+2}\cdot 7^k$ minden $k\in\mathbf{N}$ esetén osztható 17-tel.

Kovács 625 Erika (Budapest, Árpád Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján