

Alkalmazzuk a síkra az origó középpontú, 45° -os, $\sqrt{2}$ arányú forgatva nyújtást. Ekkor a rácspontok átmennek a „fehér” rácspontokba, ha sakktáblaszerűen színezzük őket, és az origó színe fehér; a négyzet pedig tengelypárhuzamossá válik. Lehet-e egy tengelypárhuzamos négyzetben pontosan 7 db fehér rácspont?

Egy tengelypárhuzamos négyzetben a rácspontok téglalapszerűen helyezkednek el.

1. eset. A téglalap egyik oldalának hossza páros: $2k \times l$; ekkor $k \cdot l$ darab fehér rácspont van benne. Ha $kl = 7$, akkor a téglalap csak 14×1 -es vagy 7×2 -es lehet. Ha egy tengelypárhuzamos téglalap belsejében a rácspontok 14×1 alakban helyezkednek el, akkor a téglalap a, b oldalaira: $14 < a \leq 16$ és $0 < b \leq 2$, így biztosan $a \neq b$, tehát a téglalap nem négyzet. Ugyanígy kezelhető a 7×2 -es eset is.

2. eset. A négyzetben a rácspontok $(2k + 1) \times (2l + 1)$ alakban helyezkednek el. Ha $n = (2k + 1)(2l + 1)$, akkor a téglalapban vagy $\frac{n+1}{2}$ vagy $\frac{n-1}{2}$ fehér rácspont található. Ez csak úgy lehet 7, ha $n = 13$ vagy 15; így a rácspontok elrendezése a négyzetben a következő lehet: 1×13 , 1×15 , 3×5 . Mindhárom eset a fentiekhez hasonlóan kizárható.

A feladat kérdésére adott válasz tehát: nem lehetséges.

Megjegyzés. Varjú Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., 10. o.t.) megmutatta, hogy akkor lenne igenlő a válasz, ha a feladatban a 7 helyett $2k(k+1)$, $k(2k+1)$, $2k^2$, $(k+1)(2k+1)$ vagy $(k+1)^2 + k^2$ alakú szám szerepelne; a 7 nem ilyen alakú.