

Vegyük fel az egység sugarú körben az α szöveget. A mozgó szár és a kör metszéspontja P , koordinátái x és y . A szinusz- és koszinuszértékeket a szokásos módon értelmezve:

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x.$$

Az egység sugarú kör és az x tengely A metszéspontjára $\angle PAO = \frac{\alpha}{2}$.

AP iránytangense: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = m$, BP iránytangense: $-\frac{1}{m}$ (merőlegesek egymásra). Ha $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ racionális, akkor A és P racionális koordinátájú pontok, így AP iránytangense, azaz $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ is racionális.

Megfordítva, az AP és BP egyenesek egyenletei:

$$y = m(x + 1), \quad \text{illetve} \quad y = -\frac{1}{m}(x - 1).$$

Az egyenesek metszéspontjának koordinátái:

$$x = \frac{1 - m^2}{m^2 + 1} \quad \text{és} \quad y = \frac{2m}{m^2 + 1}.$$

Mivel m racionális, az $x = \sin \alpha$ és $y = \cos \alpha$ is racionális.

Végül ha $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ nincs értelmezve, akkor $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$ és $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm 1$. A $\sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$ összefüggésből $\sin \alpha = 0$, a $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ -ből pedig $\cos \alpha = 1$, azaz $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ ebben az esetben is racionális értékű.

