Tudjuk, hogy az $y = \dfrac{1}{2p}x^2$ másodfokú függvény görbéje egy olyan parabola, amelynek szimmetriatengelye az y tengely, csúcsa az origóban van, és felfelé nyitott. A parabola paramétere p, a fókuszpontnak a d vezéregyenestől való távolságát méri. Esetünkben $y = x^2$, azaz $\dfrac{1}{2p} = 1$, $p = \dfrac{1}{2}$, a fókuszpont koordinátái $F\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$. Legyen E egy érintési pont (most csak az első síknegyedben vizsgáljuk az érintőket), az E koordinátái $(x_0;x_0^2)$. Annak az e érintőnek az egyenletét keressük, amely az EF egyenessel 45°-os szöget zár be.

Írjuk fel először az EF egyenes egyenletét. EF egy irányvektorának koordinátái $\mathbf{V}\left(x_0;x_0^2-\dfrac{1}{4}\right)$; egy pontjának koordinátái $F\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$, így EF egyenlete:

$$y = \frac{x_0^2-\frac{1}{4}}{x_0}x + \frac{1}{4}.$$

Ismeretes, hogy a parabola érintőjének általános egyenlete:

$$xx_0 = p(y+y_0),$$

ahol x_0, y_0 az érintési pontok koordinátái és p a paraméter.

Esetünkben $p = \dfrac{1}{2}$, így az érintő egyenlete: $xx_0 = \dfrac{1}{2}(y+x_0^2)$. Rendezve:

(1) $$y = 2x_0x - x_0^2.$$

Ha az m_1, m_2 iránytangensű egyenesek nem merőlegesek egymásra, akkor α hajlásszögükre a

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

egyenlőség áll fenn. (Lásd pl. *Hajós György:* Bevezetés a geometriába c. könyv 339. oldal.)

$$\operatorname{tg}45^\circ = 1, \qquad m_1 = \frac{x_0^2-\frac{1}{4}}{x_0}, \qquad m_2 = 2x_0$$

helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$1 = \left|\frac{\frac{x_0^2-\frac{1}{4}}{x_0} - 2x_0}{1+\frac{x_0^2-\frac{1}{4}}{x_0}\cdot 2x_0}\right|.$$

$x_0 > 0$ figyelembevételével rendezve:

$$2x_0^3 + \frac{1}{2}x_0 = x_0^2 + \frac{1}{4}, ahonnan 2x_0\left(x_0^2+\frac{1}{4}\right) = x_0^2 + \frac{1}{4},$$

$x_0^2 + \dfrac{1}{4} > 0$-val végigosztva $2x_0 = 1, x_0 = \dfrac{1}{2}$.$Vagyisaz$Erintsipontkoordinti$\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$ az első negyedben; $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$ a második negyedben. Ezeket az értékeket helyettesítve (1)-be a keresett két érintő egyenlete: $y = x - \dfrac{1}{4}$, illetve $y = -x - \dfrac{1}{4}$.

Megjegyzés. A feladatot másképpen is megoldhatjuk, pl. úgy, hogy meghatározzuk az e érintő és az x tengely T metszéspontjának a koordinátáit, és az FET háromszögre felírjuk a koszinusztételt, ahonnan x_0 értéke kiszámítható.