Az $x^2+y^2=1$ feltétel szerint van olyan α valós szám, amelyre $x=\sin\alpha$ és $y=\cos\alpha$. A vizsgált kifejezés így

$$x^2+2xy=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\sin 2\alpha=\frac{1+(2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)}{2}.$$

A zárójelben álló függvényről megmutatjuk, hogy értékkészlete a zárt $\left[-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\right]$ intervallum.

Mivel $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=1$, azért létezik olyan β, amelyre $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ és $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Ezzel az

$$f(\alpha)=\sin(2\alpha-\beta)=\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha$$

függvény értékkészlete a $[-1,\ 1]$ intervallum, ami állításunkkal egyenértékű. Tehát x^2+2xy értékei az $\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ intervallum pontjait futják futják be.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.)