I. megoldás. A bizonyítás során felhasználjuk a súlyozott számtani és súlyozott mértani közép közötti egyenlőtlenséget, amely az s_1, s_2, $\dots$, s_n valós pozitív súlyokra és az a_1, a_2, $\dots$, a_n pozitív számokra a következő:

$$\frac{s_1a_1+s_2a_2+\dots+s_na_n}{s_1+s_2+\dots+s_n} \ge \left(a_1^{s_1}a_2^{s_2}\dots a_n^{s_n}\right)^{\frac{1}{s_1+s_2+\dots+s_n}},$$

és egyenlőség csak $a_1=a_2=\dots=a_n$ esetén áll fenn.

Ha x pozitív egész, akkor $x=[x]$, így $\left(1+\frac{[x]}{x}\right)^x=2^{[x]}$, azaz egyenlőség van.

Ha x nem egész, de $x<1$, akkor $[x]=0$, és ezért ekkor is egyenlőség áll fenn.

Ha x nem egész és $x>1$, úgy $x-[x]>0$ és $[x]>0$, tehát alkalmazhatjuk a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $s_1=x-[x]$ és $s_2=[x]$ súlyokra és az $a_1=1$ és $a_2=2$ számokra:

$$\frac{x-[x]+2[x]}{x} > \sqrt[x]{2^{[x]}}, \qquad \text{ahonnan} \qquad \left(1+\frac{[x]}{x}\right)^x > 2^{[x]}.$$

Vagyis az állítást igazoltuk, és egyenlőség $x<1$ vagy egész x esetén van.

Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. A Bernoulli-egyenlőtlenséget alkalmazzuk: mivel $0\le\frac{[x]}{x}<1$, azért

$$(1+1)^{\frac{[x]}{x}} \le 1+\frac{[x]}{x}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget az x-edik hatványra emelve a bizonyítandó állítást kapjuk. Egyenlőség akkor van, ha $\frac{[x]}{x}=0$ vagy 1, vagyis ha $x<1$ vagy x egész.