

Először kiszámoljuk, hogy egy  $R$  sugarú gömb  $S$  felszínének mekkora részét fedi le egy olyan  $r$  sugarú ( $0 \leq r \leq 2R$ )  $G$  gömb, amelynek középpontja  $S$ -en van. A két gömb metszésvonala egy  $k$  kör. Ha  $k$  síkjának és  $G$  középpontjának a távolságát  $m$ -mel jelöljük, akkor a  $G$  által  $S$ -ből lefedett göbbsüveg felszíne az ismert képlet alapján  $2R \cdot \pi \cdot m$  (1. ábra). Tudjuk, hogy  $S$ ,  $G$  és  $k$  középpontjai – jelöljük ezeket rendre  $P$ ,  $Q$ ,  $T$ -vel – egy egyenesre illeszkednek. Tekintsünk egy olyan síkmetszetet, amely tartalmazza ezt az egyenest (2. ábra). Az ábrán látható  $ABQ$  háromszög Thalész tétele szerint derékszögű, így alkalmazhatjuk a befogótételt:  $BQ^2 = AQ \cdot TQ$ , azaz  $r^2 = 2R \cdot m$ . Tehát a  $G$  által  $S$  felszínéből lefedett göbbsüveg felszíne  $r^2 \cdot \pi$ .

Jelöljük ezután a feladatban szereplő négy gömb sugarát  $r_1, r_2, r_3, r_4$ -gyel. Mivel a négy gömb páronként diszjunkt, az általuk lefedett felszín az előzőek alapján  $(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) \cdot \pi$ . Az egység sugarú gömb felszíne  $4\pi$ , így azt kell igazolnunk, hogy

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \geq 1.$$

Tudjuk, hogy  $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2$ ; a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \geq 4 \cdot \left( \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{4} \right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Ezzel a bizonyítandó állítást beláttuk.

