A megoldáshoz a vektorok skaláris szorzatán kívül a vektoriális szorzásra is szükségünk lesz; az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok vektoriális szorzatán azt a $\mathbf{z} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektort értjük, amely $\mathbf{u}$-ra is és $\mathbf{v}$-re is merőleges, $\mathbf{z}$ hossza $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ hosszának, valamint közbezárt szögük szinuszának a szorzata, és $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ebben a sorrendben ún. jobbrendszert alkot. Felhasználjuk a következő azonosságokat:

$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$\mathbf{t} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{t} \times \mathbf{u} + \mathbf{t} \times \mathbf{v}$ (disztributivitás)

$\mathbf{t} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{tv})\mathbf{u} - (\mathbf{tu})\mathbf{v}$ (kifejtési tétel)

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\mathbf{t} = (\mathbf{v} \times \mathbf{t})\mathbf{u} = (\mathbf{t} \times \mathbf{u})\mathbf{v}$ (az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{t}$ vektorok ún. *vegyes szorzata;* ez pontosan akkor $\mathbf{0}$, ha a három vektor egysíkú.)

Először azt mutatjuk meg, hogy ha egy tetraéder minden lapjára „kifelé" azt a vektort állítjuk, amely a lapra merőleges és a hossza e lap területe, akkor az így kapott négy vektor összege $\mathbf{0}$. Jelöljük a tetraéder egyik csúcsából a másik három csúcsba mutató vektort $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$-vel; a négy szóban forgó vektor – ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot, ami feltehető:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \qquad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{c} \times \mathbf{b}, \qquad \mathbf{w}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{c}, \qquad \mathbf{w}_4 = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}).$$

A disztributivitás szerint $2\mathbf{w}_4 = \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{c} - \mathbf{c} \times \mathbf{b}$, ezért valóban $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_4 = \mathbf{0}$.

Térjünk rá ezután a feladat állítására. A feltételek alapján például $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ nem egysíkúak. Nyilván elegendő olyan (szükségképpen nem egysíkú) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokat találni, amelyekre

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = 2\mathbf{v}_1, \mathbf{c} \times \mathbf{a} = 2\mathbf{v}_2, (1)\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 2\mathbf{v}_3.$$

Az első két egyenlet megfelelő oldalait vektoriálisan összeszorozva:

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 4\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2.$$

A bal oldalt a kifejtési tétel szerint átalakítva:

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = [(\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a}]\,\mathbf{c} - [(\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{c}]\,\mathbf{a} = [(\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a}]\,\mathbf{c}.$$

Jelöljük a keresett $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatát W-vel; ekkor $W\mathbf{c} = 4\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, hasonlóan $W\mathbf{b} = 4\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1$ és $W\mathbf{a} = 4\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$. Ez azt mutatja, hogy (1) egyenletrendszerünk megoldása csak az $\mathbf{a}_0 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1$, $\mathbf{c}_0 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ vektorhármas skalárszorosa lehet. Valóban (az előbbiekhez hasonló átalakítással),

$$\mathbf{b}_0 \times \mathbf{c}_0 = (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = [(\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_2]\,\mathbf{v}_1, \mathbf{c}_0 \times \mathbf{a}_0 = [(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3]\,\mathbf{v}_2, \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0 = [(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_1]\,\mathbf{v}_3.$$

A $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorok (nemnulla) vegyes szorzatát V-vel jelölve így $\mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{V}}\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$, $\mathbf{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{V}}\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1$, $\mathbf{c} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{V}}\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ megoldása (1)-nek, feltéve, hogy $V > 0$; ez viszont a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorok sorrendjének alkalmas megválasztásával elérhető, ezért eleve föltehető.

Szilasi Zoltán (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. A vektoriális szorzás felhasznált tulajdonságainak igazolása megtalálható pl. *Hajós György:* Bevezetés a geometriába c. könyvében.

2. A megoldás első felében tetraéderre igazolt állítás (e speciális eset eredményének felhasználásával!) tetszőleges konvex poliéderre is igazolható: a kifelé mutató, a megfelelő lapokra merőleges és lapterület-hosszúságú vektorok összege $\mathbf{0}$.