I. megoldás. A feladat feltétele szerint $x_1+x_2+\dots+x_n=1$. A számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\dots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}} \le \frac{n\cdot\sqrt{\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}},$$

Így elegendő az

$$\text{(1)}\qquad \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\dots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \ge \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

egyenlőtlenséget bizonyítanunk. Ehhez az (1) bal oldalán álló törteket átalakítjuk:

$$\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} = -\frac{1-x_i}{\sqrt{1-x_i}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_i}} = -\sqrt{1-x_i}+\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}.$$

Ezután alsó becslést keresünk a

$$-\sqrt{1-x_1}-\sqrt{1-x_2}-\dots-\sqrt{1-x_n} \quad \text{és az} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$$

összegekre.

A számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\text{(2)}\qquad -\left(\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\dots+\sqrt{1-x_n}\right) \ge$$
$$\ge -n\sqrt{\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\dots+(1-x_n)}{n}} = -\frac{\sqrt{n}(n-1)}{\sqrt{n-1}}.$$

A harmonikus és számtani, majd a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1-x_n}} \ge \frac{n^2}{\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\dots+\sqrt{1-x_n}} \ge$$
$$\ge \frac{n^2}{n\sqrt{\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\dots+(1-x_n)}{n}}} = \frac{\sqrt{n}\cdot n}{\sqrt{n-1}}.$$

A (2) és (3) egyenlőtlenségeket összeadva:

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\dots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \ge \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x_1=x_2=\dots=x_n=\dfrac{1}{n}$.

II. megoldás. Az

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\dots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \ge \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

egyenlőtlenségre adunk másik bizonyítást. Ehhez a Jensen egyenlőtlenséget (megtalálható pl. *Molnár Emil:* Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye 1947–1970, Tankönyvkiadó, 1974. c. könyv 516. oldalán) fogjuk használni: ha $f(x)$ konvex függvény, akkor

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n} \ge f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right);$$

egyenlőség csak $x_1=x_2=\dots=x_n$ esetén áll fenn.

Az $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$ függvény a $(0,\ 1)$ intervallumon konvex, mert a második deriváltja $\dfrac{4-x}{4\left(\sqrt{1-x}\right)^5}$, $0<x<1$ esetén pozitív. Az $f(x)$ függvényre alkalmazva a Jensen-egyenlőtlenséget, adódik a kívánt állítás.