Jelöljük T-vel a megadott transzformációt. Először megmutatjuk, hogy T inverze megegyezik T-vel. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy ha T-t egymás után kétszer alkalmazzuk, akkor minden pont képe önmaga. Ez nyilvánvaló azon pontok esetén, amelyek illeszkednek az $y=x$ vagy az $y=-x$ egyenletű egyenesekre. Legyen $Q(a,\ b)$ egy olyan pont, amelyre $|a|\neq|b|$. Ekkor

$$T(T(Q(a,\ b)))=T\left(Q'\left(\frac{a}{a^2-b^2};\frac{b}{a^2-b^2}\right)\right)==Q''\left(\frac{\frac{a}{a^2-b^2}}{\left(\frac{a}{a^2-b^2}\right)^2-\left(\frac{b}{a^2-b^2}\right)^2};\frac{\frac{b}{a^2-b^2}}{\left(\frac{a}{a^2-b^2}\right)^2-\left(\frac{b}{a^2-b^2}\right)^2}\right).$$

A Q'' pont koordinátáiban szereplő emeletes törteket átalakítva:

$$\frac{\frac{a}{a^2-b^2}}{\left(\frac{a}{a^2-b^2}\right)^2-\left(\frac{b}{a^2-b^2}\right)^2}=\frac{a(a^2-b^2)}{a^2-b^2}=a \quad \text{és} \quad \frac{\frac{b}{a^2-b^2}}{\left(\frac{a}{a^2-b^2}\right)^2-\left(\frac{b}{a^2-b^2}\right)^2}=\frac{b(a^2-b^2)}{a^2-b^2}=b,$$

tehát Q'' valóban megegyezik Q-val.

Ha a síkon egy $\mathcal{A}$ alakzat egyenlete $F(x,y)=0$, S pedig olyan invertálható transzformáció, amelynek S^{-1} inverze a $P(x,\ y)$ pontot a $P'(x',\ y')$ pontba viszi, akkor az $\mathcal{A}$ alakzat S-nél származó képének egyenlete $F(x',\ y')=0$, mert $P\in S(\mathcal{A})$ pontosan akkor teljesül, ha $S^{-1}(P)\in S^{-1}(S(\mathcal{A}))$, azaz ha $P'\in\mathcal{A}$.

Esetünkben $T^{-1}=T$, tehát a transzformáció inverze is helyben hagyja azokat a pontokat, amelyeknek koordinátáira $|x|=|y|$ teljesül, $|x|\neq|y|$ esetén pedig $T^{-1}(P(x,\ y))=P'\left(\dfrac{x}{x^2-y^2};\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)$. A sík minden e egyenesének egyenlete felírható $Ax+By+C=0$ alakban, ahol $A^2+B^2\neq0$. Az e egyenesnek azok a pontjai, amelyek rajta vannak az $y=x$ vagy az $y=-x$ egyenletű egyeneseken, helyben maradnak a T transzformációnál, az e további pontjai pedig az előzőek alapján az

$$A\frac{x}{x^2-y^2}+B\frac{y}{x^2-y^2}+C=0$$

egyenletű alakzatra kerülnek. E pontok megegyeznek a

$$C(x^2-y^2)+Ax+By=0 \tag{1}$$

egyenletű alakzat pontjaival. Az (1) egyenlet $C=0$ esetén $A^2+B^2\neq0$ miatt egy origón átmenő egyenes egyenlete. Ha $C\neq0$, akkor (1) a következő alakra hozható:

$$\left(x+\frac{A}{2C}\right)^2-\left(y-\frac{B}{2C}\right)^2=\frac{A^2-B^2}{4C^2}. \tag{2}$$

Ez $|A|\neq|B|$ esetén egy hiperbola, $|A|=|B|$ esetén pedig egy metsző egyenespár egyenlete.

Ezek alapján a sík egyeneseinek T-nél kapott képe a következő:

i) Ha e egy origón átmenő egyenes, akkor képe önmaga (*1. ábra*). Ha egyenlete $y=\pm x$, akkor a képe T definíciója szerint önmaga. Ha pedig egyenlete $Ax+By=0$, akkor $C=0$ miatt az (1) egyenlet, tehát e képének egyenlete is $Ax+By=0$, és ennek az egyenesnek minden pontja előáll képként.

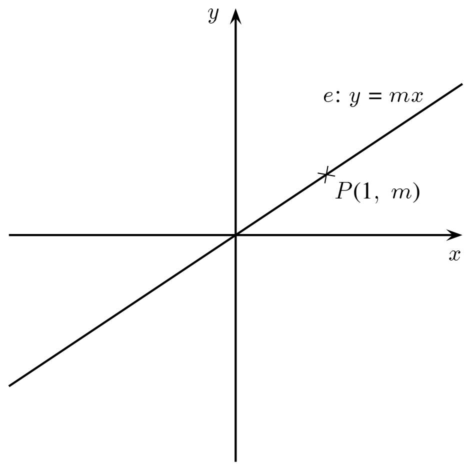
ii) Ha e nem megy át az origón és nem párhuzamos az $y=\pm x$ egyenletű egyenesek egyikével sem – azaz ha $C\neq0$ és $|A|\neq|B|$ –, akkor e-nek az $y=\pm x$ egyenletű egyenesekkel való metszéspontjai helyben maradnak, a további pontok képei pedig a (2) egyenletű hiperbolának az origótól különböző összes pontját befutják (*2. ábra*).

iii) Ha e nem megy át az origón, de párhuzamos az $y=\pm x$ egyenletű egyenesek egyikével – azaz ha $C\neq0$ és $|A|=|B|$ –, akkor a (2) egyenlet

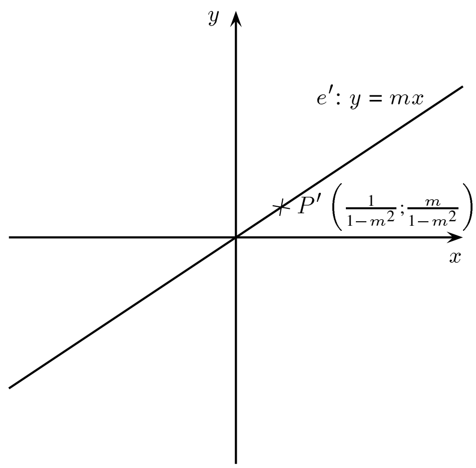
$$\left(x+y+\frac{A-B}{2C}\right)\left(x-y+\frac{A+B}{2C}\right)=0 \tag{3}$$

alakba írható. $|A|=|B|$ miatt a két egyenes egyike megegyezik az $y=\pm x$ egyenesek egyikével. Az e egyenes képe a (3) egyenlettel leírt egyenespár másik egyenese lesz, kivéve a *3. ábrán* látható metszéspontot. Ezen kívül ebben az esetben is lesz egy fixpont, e-nek az $y=x$ vagy az $y=-x$ egyenletű egyenessel való metszéspontja.

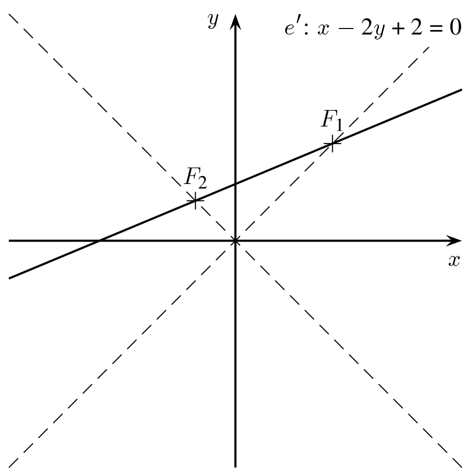
Szilasi Zoltán (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján



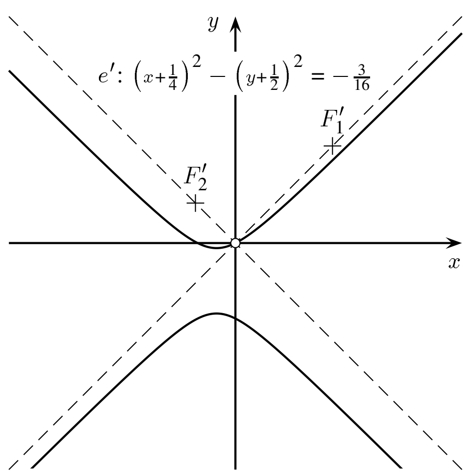
y
$e\colon y = mx$
$P(1,\ m)$
x



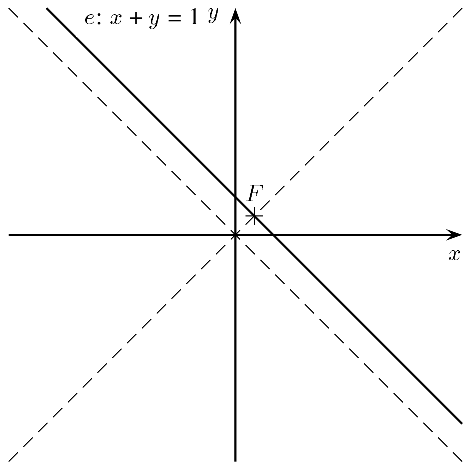
y
$e'\colon y = mx$
$P'\left(\frac{1}{1-m^2};\frac{m}{1-m^2}\right)$
x



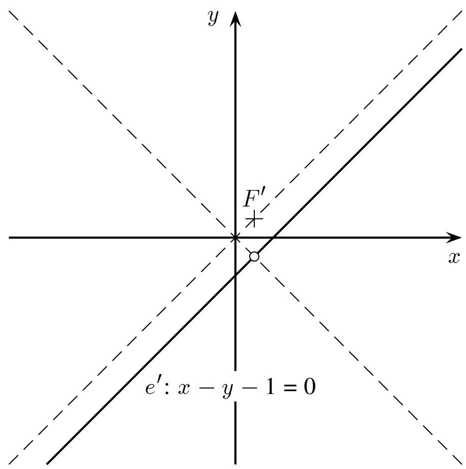
y
$e'\colon x - 2y + 2 = 0$
F_1
F_2
x



y
$e'\colon \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{16}$
F_1'
F_2'
x



$e\colon x + y = 1$
y
F
x



y
F'
x
$e'\colon x - y - 1 = 0$