Jelöljük a test éleinek számát e-vel, az i oldalú lapok számát ℓ_i-vel, az i számú élt tartalmazó csúcsok számát pedig c_i-vel ($i = 3, 5, 7, \ldots$). Mivel a test minden éle két lapon van rajta, illetve két csúcsban végződik, azért

$$2e = 3\ell_3 + 5\ell_5 + 7\ell_7 + \cdots + i \cdot \ell_i + \ldots \quad \text{és} \quad 2e = 3c_3 + 5c_5 + 7c_7 + \cdots + ic_i + \ldots$$

A poliéder konvex, ezért érvényes rá Euler tétele: $e + 2 = (\ell_3 + \ell_5 + \ell_7 + \ldots) + (c_3 + c_5 + c_7 + \ldots)$. Ezt 4-gyel szorozva és az előző két egyenlőséget felhasználva, átalakítva kapjuk, hogy

$$4(\ell_3 + \ell_5 + \ell_7 + \ldots) + 4(c_3 + c_5 + c_7 + \ldots) = 4e + 8 =$$
$$2e + 2e + 8 = (3\ell_3 + 5\ell_5 + 7\ell_7 + \ldots) + (3c_3 + 5c_5 + 7c_7 + \ldots) + 8.$$

Ezt rendezve

$$\ell_3 + c_3 = 8 + (\ell_5 + 3\ell_7 + \cdots + (i-4)\ell_i + \ldots) + (c_5 + 3c_7 + \cdots + (i-4)c_i + \ldots)$$

adódik.

A feladat feltételei szerint $\ell_3 + c_3 = 9$, ami csak úgy lehetséges, ha a testnek a háromszöglapokon kívül pontosan egy ötszöglapja van, vagy a három élre illeszkedő csúcsokon kívül pontosan egy ötélű csúcsa van. Az első esetben $\ell_5 = 1$ és $c_5 = 0$, tehát

$$2e = 3\ell_3 + 5 \cdot 1 = 3c_3 = 3 \cdot (9 - \ell_3),$$

vagyis $3\ell_3 + 5 = 27 - 3\ell_3$, azaz $\ell_3 = \dfrac{11}{3}$, ami nyilván nem lehet, mert a háromszöglapok szám egész szám. A második esetben teljesen hasonló módon $c_3 = \dfrac{11}{3}$ adódik, ami szintén lehetetlen.

Ezzel megmutattuk, hogy a feladat kérdésére a válasz: nem.

Birkner Tamás (Budapest, Deutsche Schule, 6. o.t.) dolgozata alapján