Először megmutatjuk, hogy 5 fiú és 5 lány esetén az ismeretségek száma legfeljebb 12. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, a tagok közt legalább 13 ismeretség van. Ekkor a skatulya-elv alapján van 2 lány, akik együttvéve legalább 6 fiút ismernek. Ennél több fiút viszont nem is ismerhetnek, hiszen 5 fiú van, és ezek közül legfeljebb egyet ismernek mindketten. Tehát van 2 lány, akik együtt 6 ismeretséggel rendelkeznek, minden fiút ismer valamelyikük, egyet pedig mindketten. Ekkor viszont a többi lánynak fejenként legfeljebb 2 ismerőse lehet, egy a fenti lányok közül az egyik, egy pedig a másik fiúismerősei közül, különben valamelyiküknek 2 közös ismerőse lenne. Így az 5 lánynak összesen legfeljebb $6+3\cdot 2=12$ ismerőse van, ami ellentmond a feltevésünknek.

Az *1. ábrán* látható, hogy 12 ismeretség viszont már lehetséges a feltételeknek megfelelő módon. A lányokat az L_1, L_2, …, L_5, a fiúkat az F_1, F_2, …, F_5 pontok jelképezik, a társaság két tagja pedig pontosan akkor ismeri egymást, ha a megfelelő pontok össze vannak kötve.

Megmutatjuk, hogy 7 lány és 7 fiú esetén az ismeretségek száma legfeljebb 21. Tegyük fel, hogy ennél több. Ekkor a skatulya-elv alapján van egy lány, akinek legalább 4 ismerőse van. Ha egy másik lánnyal együtt valamennyi fiút ismerik, akkor ketten együtt legfeljebb 8 ismeretséggel rendelkeznek, a többiek pedig az előző esetekben is alkalmazott gondolatmenet szerint egyenként legfeljebb kettővel, vagyis az összes ismeretségek száma legfeljebb $8+5\cdot 2=18$, ami ellentmondás. Nincs tehát olyan lány, aki az első lány által nem ismert „szabad” fiúk mindegyikét ismerné.

Ekkor viszont csak úgy jöhet létre 22 ismeretség, ha az első lány pontosan 4 fiút ismer, a többi lány mindegyike pedig 2-2 szabad fiút, valamint az első lány ismerősei közül 1-1 fiút ismer. ($22=4+6\cdot 3$, 22-nél több ismeretség nem jöhet létre.) Ez azt jelenti, hogy a 6 lány közt biztosan van kettő, akiknek van közös ismerőse az első lány által ismert 4 fiú között (ismét a skatulya-elvet használtuk, $6>4$). De ez a két lány a 3 szabad fiú közül 2-2-t ismer, tehát a szabad fiúk közt is van közös ismerősük, ami ellentmond a feladat feltételeinek. Tehát az ismeretségek száma valóban legfeljebb 21.

Azt, hogy 21 ismeretség elérhető, a *2. ábrán* látható táblázat mutatja. A sorok a lányokat, az oszlopok a fiúkat jelképezik, egy sor és egy oszlop kereszteződésébe pontosan akkor írtunk 1-est, ha a megfelelő fiú és lány ismeri egymást.

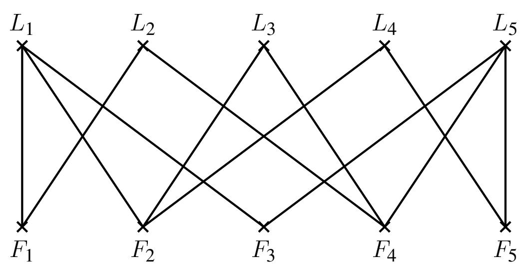
Dancsó Zsuzsanna (Budapest, ELTE Trefort Á. Gyak. Isk., 12. o.t.)

Megjegyzések. 1. Meg lehet mutatni, hogy 21 ismeretség csak úgy jöhet létre a feltételeknek megfelelő módon, ahogyan azt példánkban megadtuk (azaz a fiúkat és a lányokat megszámozhatjuk úgy, hogy az ismeretségek éppen a táblázatban megadottak legyenek).

2. Feladatunk tulajdonképpen egy gráfelméleti szélsőérték-probléma két speciális esetével foglalkozik. A probléma a következő:

Legfeljebb hány éle lehet egy olyan páros gráfnak, amelynek mind csúcshalmazában n csúcs van, és nem tartalmaz négyszöget?

A feladat megoldása megtalálható pl. *Reiman István:* A geometria és határterületei című könyvének 334–336. oldalain. Általában igaz, hogy az élek száma legfeljebb $\left(n+\sqrt{4n^3-3n^2}\right)/2$, s ez a korlát csak akkor érhető el, ha létezik ún. q-adrendű véges projektív sík, ahol $n=q^2+q+1$.



	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
L_7	1	1		1			
L_6		1	1		1		
L_5			1	1		1	
L_4				1	1		1
L_3	1				1	1	
L_2		1				1	1
L_1	1		1				1