Jelöljük az $ABCD$ négyszög oldalait az *ábrákon* látható módon $a$, $b$, $c$, $d$-vel, az $A$ és a $C$ csúcsnál lévő szögét pedig $\alpha$-val, illetve $\gamma$-val.

A $KL = MN$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $KL^2 - MN^2 = 0$, vagyis – a koszinusztételt alkalmazva az $AKL$ és a $CNM$ háromszögekre – ha

$$\left[(\sqrt{ad})^2 + (\sqrt{ad})^2 - 2\sqrt{ad}\cdot\sqrt{ad}\cos\alpha\right] - \left[(\sqrt{bc})^2 + (\sqrt{bc})^2 - 2\sqrt{bc}\cdot\sqrt{bc}\cos\gamma\right] = 0. \tag{1}$$

Viszont az $ABD$ és a $CBD$ háromszögek közös $BD$ oldalára felírt koszinusztétel szerint

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma,$$

ezért az (1) feltételt átalakíthatjuk a következő módon:

$$0 = (2ad - 2ad\cos\alpha) - (2bc - 2bc\cos\gamma) = 2ad - 2bc + b^2 + c^2 - (a^2 + d^2) == (b-c)^2 - (a-d)^2 = (a+b-c-d)(b+d-a-c)$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, mondhatjuk, hogy $KL = MN$ pontosan akkor teljesül, ha $a + b = c + d$ vagy $a + c = b + d$. (Ez a feltétel úgy is fogalmazható, hogy az $A$ és $C$ pontok ugyanazon a $B$ és $D$ fókuszú hiperbolán vannak.)

*Terpai Tamás* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján