Jelöljük az AC_1B_1, BC_1A_1, CA_1B_1, $A_1B_1C_1$ és ABC háromszögek területét és kerületét rendre T_1, K_1; T_2, K_2; T_3, K_3; T_4, K_4 és T, K-val. Tudjuk, hogy egy háromszög területének kétszerese megegyezik kerületének és a beírt kör sugarának szorzatával. Az öt háromszög kerületére nyilvánvalóan teljesülő $\frac{K_1+K_2+K_3}{2} = \frac{K_4+K}{2}$ egyenlőséget tehát

$$\frac{T_1}{r_1}+\frac{T_2}{r_2}+\frac{T_3}{r_3}=\frac{T_4}{r_4}+\frac{T}{r} \tag{1}$$

alakba is írhatjuk.

Legyen $\alpha = BAC\sphericalangle$. Ekkor $2T = AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$ és $2T_1 = AB_1 \cdot AC_1 \cdot \sin\alpha$. Mivel $\frac{AC_1}{C_1B} = \lambda$ és $AC_1 + C_1B = AB$, azért $AC_1 = \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot AB$; a $\frac{CB_1}{B_1A} = \lambda$ és $CB_1 + B_1A = CA$ összefüggésekből pedig $AB_1 = \frac{1}{1+\lambda} \cdot AC$ adódik. Vagyis

$$2T_1 = AB_1 \cdot AC_1 \cdot \sin\alpha = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \cdot 2T.$$

Ugyanígy látható be, hogy $T_2 = T_3 = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \cdot T$ is teljesül. Ebből következik, hogy $T_4 = T - (T_1+T_2+T_3) = \left(1 - \frac{3\lambda}{(1+\lambda)^2}\right) \cdot T$. Ezeket az (1) egyenlőségbe írva:

$$\frac{\lambda \cdot T}{(1+\lambda)^2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right) = \left(1-\frac{3\lambda}{(1+\lambda)^2}\right)\frac{T}{r_4}+\frac{T}{r}.$$

Ezt rendezve, és felhasználva az $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_4}+\frac{4}{r}$ feltételt, kapjuk, hogy

$$\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\left(\frac{1}{r_4}+\frac{4}{r}\right) = \frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\cdot\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r}.$$

Ezt $(1+\lambda)^2$-tel szorozva, majd ismét rendezve:

$$\lambda\cdot\frac{1}{r_4}+4\lambda\cdot\frac{1}{r} = (1-\lambda+\lambda^2)\cdot\frac{1}{r_4}+(1+2\lambda+\lambda^2)\cdot\frac{1}{r},$$
$$0 = (1-\lambda)^2\cdot\left(\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r}\right).$$

Ez csak akkor teljesülhet, ha $\lambda = 1$.

A $\lambda = 1$ esetben az A_1, B_1, C_1 pontok a háromszög oldalfelező pontjai, ezért a négy kis háromszög mindegyike hasonló az ABC háromszöghöz, a hasonlóság aránya $1:2$. Tehát ekkor $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{2}r$, vagyis valóban teljesül az $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_4}+\frac{4}{r}$ összefüggés.