A $285=a+(285-a)$ egyenlet azon pozitív egész megoldásait keressük, amelyekre a és $285-a$ relatív prímek. Ez pontosan azt jelenti, hogy a és 285 relatív prímek. Valóban, ha egy d egész osztója a-nak is és 285-nek is, akkor (a-nak és) $(285-a)$-nak is osztója; megfordítva, ha egy d egész osztója a-nak is és $(285-a)$-nak is, akkor osztója (a-nak és) $a+(285-a)=285$-nek is. Tehát a és 285 legnagyobb közös osztója egyenlő a és $(285-a)$ legnagyobb közös osztójával.

Keressük tehát a 285-nél kisebb számok közül azokat, amelyek 285-höz relatív prímek.

Ismeretes, hogy ha az n prímtényezős felbontása

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot p_k^{\alpha_k},$$

akkor a hozzá relatív prím számok számát a

$$\varphi(n)=n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

összefüggés adja.

Esetünkben $n=285=3\cdot5\cdot19$, és így

$$\varphi(285)=285\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{19}\right)=285\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{18}{19}=144,$$

a relatív prím számok száma. Mint láttuk, ezek páronként csoportosíthatók úgy, hogy a párok összege 285. Így összesen 72 megfelelő számpár van.

Springer Éva (Budapest, Szent István Gimn., 9. o.t.)

Megjegyzés. A feladatot megoldhatjuk a φ függvény ismerete nélkül is, ha megszámoljuk, hány olyan szám van 285-ig, amely osztható 3-mal, 5-tel, 19-cel, $3\cdot5=15$-tel, $3\cdot19=57$-tel, $5\cdot19=95$-tel és $3\cdot5\cdot19=395$-tel:

3 3-mal 95 darab szám, 5-tel 57 darab szám, 19-cel 15 darab szám osztható, ezek összegéből kell levonni a 15-tel, 57-tel, 95-tel és $3\cdot5\cdot19=285$-tel osztható számok számát, azaz $95+57+15-18-5-3+1=141$-et, mert ezekből nem képezhetők relatív prím számpárok. A maradék $285-141=144$-ből viszont igen.

Bohák András (Budapest, Evangélikus Gimn., 10. o.t.)