Az $ABCD$ derékszögű trapézban B vetülete a DC-re legyen B' (*1. ábra*). Az $AB = DB'$ miatt $B'C = 100$, és a $B'BC$ egyenlő szárú háromszögből $BB' = B'C = AD = 100$, $BC = 100\sqrt{2}$.

A trapéz tehát egy 100 m oldalú négyzet és egy hozzáillesztett egyenlő szárú derékszögű háromszög, kerülete pedig: $400 + 100\sqrt{2}$.

A két őr a körüljárás irányában egyenlő távolságot tart egymással, vagyis a kerület mentén mért távolságuk a teljes kerület fele: $d = 200 + 50\sqrt{2}$.

Mivel ez a távolság a mozgás során állandó, elegendő az egyik őr mozgását vizsgálni egy félkerületnyi részen. Legyen F a BC szakasz felezőpontja. Amikor az egyik őr F-ben van, akkor a másik éppen D-ben, hiszen $DA + AB + BF = 100 + 100 + 50\sqrt{2} = 200 + 50\sqrt{2} = d$.

Azt vizsgáljuk tehát, hogy mikor van a két őr légvonalban a legmesszebb egymástól, miközben az első őr D-ből F-be jut. A távolságok helyett keressük a távolságok négyzetének maximumát. Ezt megtehetjük, mivel a távolság mindig pozitív.

Osszuk fel a CD oldalt úgy, hogy $DP = 50\sqrt{2}$, $DQ = 50\sqrt{2} + 100$, és legyen R az AD szakasz azon pontja, amelyre $DR = 50\sqrt{2}$ (*2. ábra*).

Könnyen belátható, hogy (minden esetben a trapéz kerületén haladva ugyanolyan irányban) $AQ = BP = DF = RC = 200 + 50\sqrt{2}$. Kövessük az első őr útját, amíg a D pontból indulva a P, Q, C pontokon keresztül eljut az „átellenes" F pontba.

1. Ha az első őr D-ben van, akkor a másik F-ben. Ekkor a légvonalbeli távolságuk négyzete a DFF' derékszögű háromszögből (F' az F vetülete DC-re):

$$DF^2 = 50^2 + 150^2 = 25\ 000 \qquad (DF \approx 158,1).$$

2. Az első őr haladjon a DP szakaszon P-ig. Ekkor a második az FB szakaszon mozog B-ig; amikor B-be ért, a két őr távolságának négyzete:

$$PB^2 = 100^2 + (100 - 50\sqrt{2})^2 \approx 24\ 858.$$

A közbülső helyeken (*3. ábra*) egy olyan derékszögű háromszög átfogójának négyzetét kapjuk, amelyben az a, b befogókra $a \le 100$ és $b \le 50\sqrt{2} + 100$, ezért

$$d_1^2 \le 100^2 + (50\sqrt{2} + 100)^2 \approx 39\ 142.$$

3. Haladjon az első őr tovább a Q pontig. Amikor az első őr Q-ban, akkor a második őr az A pontban lesz, és a távolságuk négyzete:

$$QA^2 = 100^2 + (100 + 50\sqrt{2})^2 \approx 39\ 142.$$

A közbülső helyeken: $a = 100$, $b \le DQ = 100 + 50\sqrt{2}$ miatt

$$d_2^2 < QA^2 = 39\ 142. \qquad (\textit{4. ábra}).$$

4. Az első őr a QC szakaszon mozog, a második az AR-en. Láttuk, hogy C és R „átellenes" pontok, így a két őr egyszerre érkezik C-be, illetve R-be. Azt állítjuk, hogy QC, illetve a megfelelő AR szakaszokon mozogva az őrök távolsága növekszik (*5. ábra*). Ekkor ugyanis ez a távolság egy olyan derékszögű háromszög átfogója, ahol a befogók összege, $x + y$ állandó, a kerülete fele.

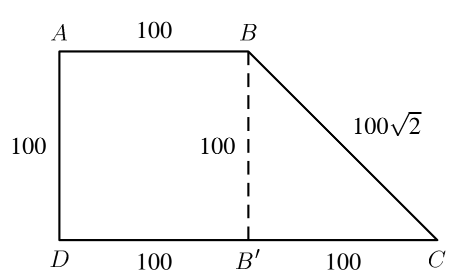
Az $x^2 + y^2 = \dfrac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2}$ azonosságból pedig következik, hogy ekkor az átfogó hossza a befogók eltérésével nő. Mivel Q-ból C-be, illetve A-ból R-be haladva ez az eltérés valóban növekszik – a hosszabbik befogó nő, a rövidebbik csökken –

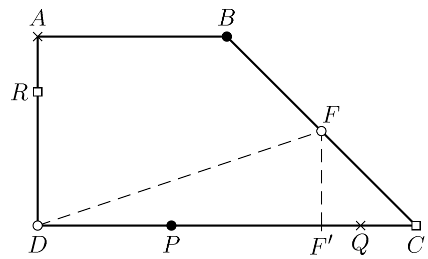
$$d_3 < RC^2 = RD^2 + DC^2 = 45\ 000.$$

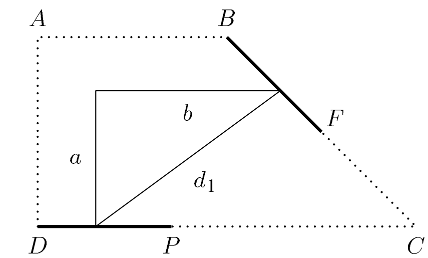
5. Végül, ha az első őr a CF szakaszon halad, a második pedig az RD-n, akkor távolságuk kisebb, mint RC, hiszen a satírozott derékszögű háromszög befogói csökkennek RD-hez, illetve DC-hez képest (*6. ábra*).

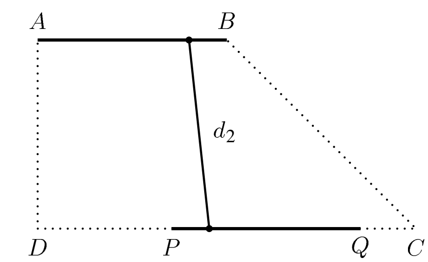
A fentiekből látható, hogy az őrök távolsága légvonalban akkor a legnagyobb, ha egyikük a C, másikuk pedig az R pontban van. Ez a távolság $CR = \sqrt{45\ 000} \approx 222,1$ méter.

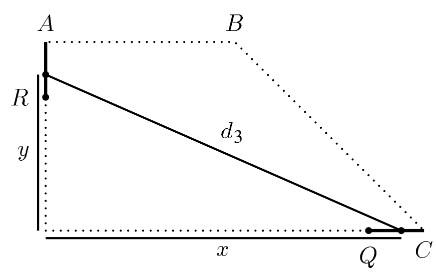
Gajdos Béla (Beregszász, Bethlen G. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

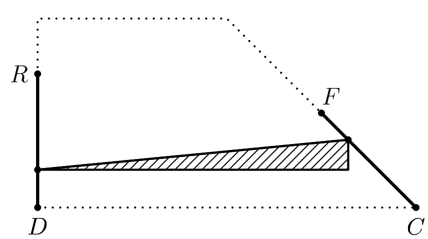



A
B
R
F
D
P
F′
Q
C


A
B
b
F
a
d1
D
P
C


A
B
d2
D
P
Q
C


A
B
R
d3
y
x
Q
C


R
F
D
C