A feladatot úgy oldjuk meg, hogy az $APB\triangle \sim CPD\triangle$ hasonlóságban A képe C és B képe D legyen. Vegyük előre a speciális eseteket. Legyen először $AB = CD$, és a két szakasz illeszkedjen egy egyenesre (*1. ábra*). Az AB és CD ábra szerinti elhelyezkedése esetén végtelen sok megoldás lesz, és az APB és CPD háromszögek egybevágók. Könnyen látható, hogy P csak az AC felező merőlegesének egy F-től különböző pontja lehet. A pontok A, B, C, D sorrendje esetén nincs megoldás. Nem kapunk megoldást akkor sem, ha AB és CD egy egyenesre illeszkedik, és $AB \neq CD$.

Ekkor ugyanis a hasonlóság aránya $\dfrac{AB}{CD} \neq 1$, míg a P-ből induló magasságok aránya 1 lenne.

Ha $AB \parallel CD$, de nem esnek egy egyenesre (*2.* és *3. ábra*), akkor P csak AC és BD metszéspontja lehet, különben PA és PC vagy PB és PD nem esnének egy egyenesbe, de akkor nem lenne egyenlő a két háromszögben az A-nál és C-nél vagy a B-nél és D-nél lévő szög. A *2. ábra* szerinti esetben $AB = CD$-re nincs megoldás.

Hátravan még az az eset, amikor AB és CD nem párhuzamosak. Tegyük fel először, hogy az APB és CPD háromszögek irányítása egyező (*4. ábra*). Ekkor P csak olyan pont lehet, amelyre a $\dfrac{CD}{AB}$ arányú, P középpontú, φ szögű nyújtva forgatás AB-t CD-be viszi át. Legyen AB és CD metszéspontja M, az ACM és BDM háromszögek körülírt körének másik metszéspontja P. Az azonosan jelölt kerületi szögek egyenlősége miatt az APB és CPD háromszögek megfelelnek a feladat feltételeinek. Mivel a két körnek M közös pontja, a P pont mindig létrejön, és a szerkesztésből látható, hogy egyértelműen, így egy megoldás lesz. Legfeljebb az fordulhat elő, hogy P egybeesik M-mel, amikor is a háromszögek elfajulóak, tehát nem lesz megoldás.

Ugyanígy oldhatjuk meg a feladatot, ha AB és CD az *5. ábra* szerinti.

Legyen ezután APB és CPD irányítása különböző, és AB nem párhuzamos CD-vel (*6. ábra*). Mivel a P-nél lévő szögek egyenlők, a $BPD\sphericalangle$ t felezőjére tükrözve, A képe a PC, B képe a PD egyenesre illeszkedik. A szögfelezőtétel szerint

$$\frac{AA_1}{A_1C} = \frac{PA}{PC} = \frac{AB}{CD}, \quad \text{és ugyanígy} \quad \frac{BB_1}{B_1D} = \frac{AB}{CD},$$

tehát A_1, B_1 és velük t megszerkeszthető. Ezután CA' és t metszéspontjaként (feltéve, hogy nem párhuzamosak) egyértelműen kapjuk a P pontot, tehát most is egy megoldás lesz.

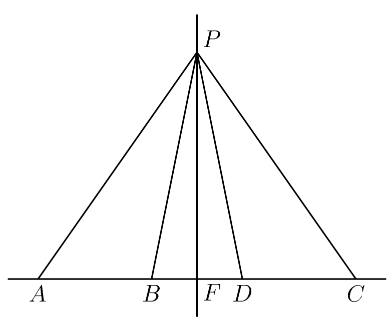
Megjegyzések.

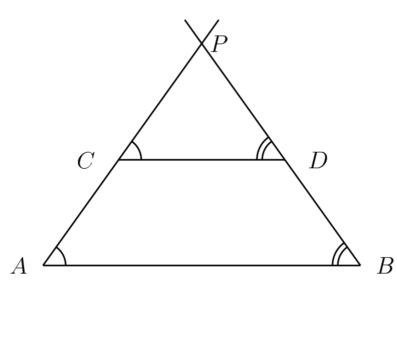
1. A *6. ábrán* a CD szakasz az AB nyújtva tükrözéssel szerkesztett képe.

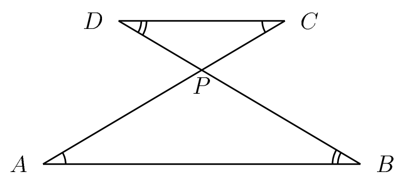
2. A nyújtva forgatás egy középpontos hasonlóság és egy, a középpont körüli forgatás szorzata (egymásutánja). Egyértelműen megadható a középponttal, a hasonlóság arányával és az elforgatás szögével.

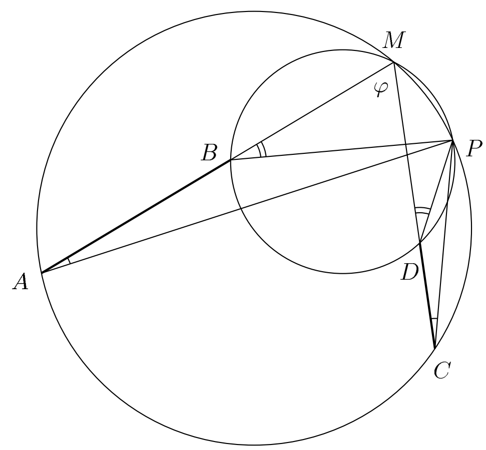
3. A *4.* és *6. ábráról* leolvasható, hogy a nyújtva forgatás, illetve a nyújtva tükrözés két megfelelő pontpárral is megadható.

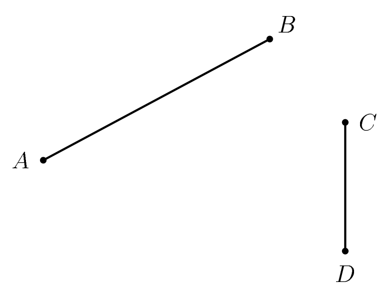
4. Bővebben olvashatunk ezekről a transzformációkról *Reiman István:* A geometria és határterületei c. könyve 111–113. oldalain.

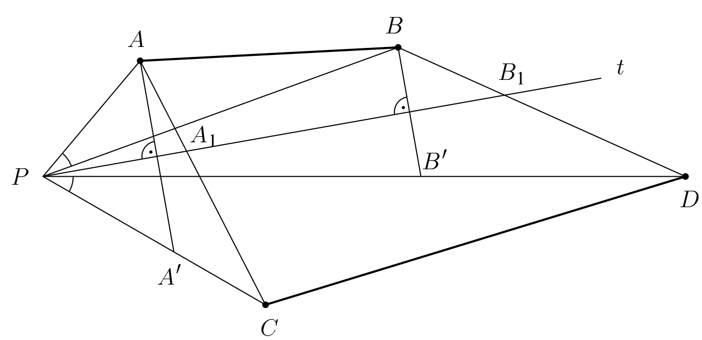





D
C
P
A
B


M
φ
B
P
A
D
C


B
C
A
D


A
B
B_1
t
A_1
P
B'
D
A'
C