A 360 osztóinak számát a prímtényezős felbontásból határozzuk meg az ismert összefüggés szerint.

Ha $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor n osztóinak száma

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + a) \dots (\alpha_n + 1).$$

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $d(360) = (3+1)(2+1)(1+1) = 24$.

Keressük tehát azt a legkisebb N páratlan számot, amelynek 24 osztója van. Mivel a keresett szám páratlan, törzstényezős felbontásában csak páratlan prímszámok szerepelnek. Mivel azt akarjuk, hogy N a lehető legkisebb legyen, azért felbontásában a lehető legkisebb páratlan prímszámok kell szerepeljenek; kezdjük ezért a 3-mal.

$N = 3^{23}$: ez nagyon nagy szám, ennél biztos találunk kisebbet.

$N = 3^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$, $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 24$. Kéttényezős szorzatra felbontva a 24-et:

$$24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6.$$

1-nél nagyobb alap esetén az exponenciális függvény szigorúan monoton nő, és ha az alapot növeljük, a hatvány értéke nő ugyanakkora kitevő mellett. Ezeket figyelembe véve, 3 kitevője nagyobb kell legyen, mint az 5 kitevője, ha minél kisebb számra törekszünk.

24 kéttényezős felbontásaiból: $N = 3^{11} \cdot 5$ vagy $3^7 \cdot 5^2$ vagy $3^5 \cdot 5^3$.

Hasonlítsuk össze ezeket a szorzatokat:

$$3^{11} \cdot 5 = 3^7 \cdot 3^4 \cdot 5 = 3^7 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 5 > 3^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 > 3^7 \cdot 5^2,$$

és

$$3^7 \cdot 5^2 = 3^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 > 3^5 \cdot 5^3,$$

vagyis a legkisebb az $N = 3^5 \cdot 5^3 = 30\,375$.

Vegyük a következő prímszámot, a 7-et, és vizsgáljuk a 24 háromtényezős felbontásait.

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4$, most a legkisebb $N = 3^5 \cdot 5 \cdot 7$ vagy $3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Az előzőhöz hasonlóan látható, hogy

$$3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 4725 < 3^5 \cdot 5 \cdot 7.$$

Ha 24-et négy tényező szorzatára bontjuk (ez csak egyféleképpen lehetséges, hiszen $24 = 2^3 \cdot 3$) és vesszük a következő prímszámot, a 11-et, azt kapjuk, hogy $N = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 3465$.

Mivel négynél több prím szorzatára már nem bontható a 24, ez a legkisebb szám, amely eleget tesz a feladat feltételeinek.

Sipos Tünde (Heves, Eötvös J. Gimn., 12. o.t.)