Tekintsünk egy N elemű H ponthalmazt, amely megfelel a feladatban szereplő feltételeknek. Tegyük fel, hogy H konvex burkának n csúcsa van. Ezt a konvex n-szöget egy csúcsából kiinduló átlói segítségével $n-2$ háromszögre bonthatjuk, amelyek mindegyikében H-nak pontosan egy pontja helyezkedik el, a második feltétel értelmében. Egy ilyen háromszög határára – az első feltétel miatt – H-nak nem eshet más pontja, mint a szóban forgó háromszög 3 csúcsa. A H halmaz tehát pontosan a konvex burkának a csúcspontjaiból és az előbb említett $n-2$ pontból áll. Ennek következtében $N = 2n-2 = 2(n-1)$, azaz páros szám.

A következőkben megmutatjuk, hogy minden 3-nál nagyobb N páros szám esetén megadható a síkon N pont a követelményeknek megfelelően. Legyen $n = \dfrac{N+2}{2}$, ekkor $n \geq 3$. Tekintsünk egy tetszőleges $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ konvex n-szöget. Ennek a belsejében vegyünk fel $n-2$ további pontot a következőképpen. Minden $1 \leq i \leq n-2$ esetén legyen Q_i a $P_0P_iP_{n-1}$ és $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ háromszögek közös részének tetszőleges belső pontja. Azt állítjuk, hogy a $H = \{P_0,\ P_1,\ \dots,\ P_{n-1},\ Q_1,\ \dots,\ Q_{n-1}\}$ ponthalmaz megfelel a feltételeknek.

Legyen $0 \leq i < j < k \leq n-1$. Azt állítjuk, hogy a $P_iP_jP_k$ háromszög belseje H pontjai közül egyedül a Q_j pontot tartalmazza. Először azt mutatjuk meg, hogy Q_j valóban a $P_iP_jP_k$ háromszög belső pontja. A $P_iP_jP_k$ szögtartomány tartalmazza a P_0, P_j, P_{n-1} pontokat, és így a $P_0P_jP_{n-1}$ háromszög minden pontját is. Minthogy Q_j ennek a háromszögnek belső pontja, Q_j a $P_iP_jP_k$ szögtartomány belsejében van (*1. ábra*).

Hasonlóképpen látható, hogy Q_j a P_iP_k egyenesre támaszkodó, P_j-t tartalmazó félsík belsejében található, hiszen ez a félsík tartalmazza a P_{j-1}, P_j, P_{j+1} pontokat, és Q_j a $P_{j-1}P_jP_{j+1}$ háromszög belső pontja (*2. ábra*).

A Q_j pont tehát az *1. ábrán* látható nyílt szögtartomány és a *2. ábrán* látható nyílt félsík közös részében van, ez pedig éppen a $P_iP_jP_k$ háromszög belső pontjainak halmaza. Most megmutatjuk, hogy ez a halmaz H pontjai közül a Q_j-n kívül egyetlen pontot sem tartalmaz. A $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ sokszög konvex, ezért egyik csúcsa sem eshet a $P_iP_jP_k$ háromszög belsejébe. Tekintsük most valamelyik Q_l pontot, ahol $l \neq j$. Ez a pont a $P_{l-1}P_lP_{l+1}$ háromszög belsejében helyezkedik el. Ha $l < i$, akkor a P_0P_i egyenes elválasztja ezt a háromszöget a $P_iP_jP_k$ háromszögtől, tehát Q_l valóban nem eshet az utóbbi háromszög belsejébe. Az $i < l < j$, $j < l < k$, illetve $k < l$ esetekben a megfelelő elválasztó egyenesek rendre a P_iP_j, P_jP_k és P_kP_{n-1} egyenesek. A *3. ábra* az $l = j-1$ esetet szemlélteti. Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

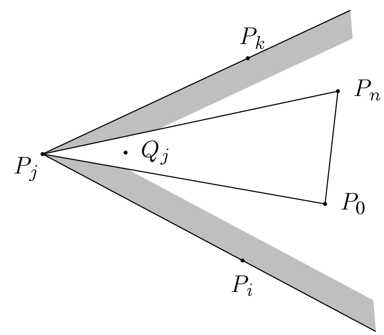
Hátravan még annak igazolása, hogy H pontjai közül semelyik három nem esik egy egyenesre. A konstrukcióból azonnal következik, hogy semelyik P_iP_j egyenes nem illeszkedhet H-nak egyetlen további pontjára sem. Ha tehát egy egyenes H pontjai közül hármat is tartalmazna, akkor tartalmaznia kellene legalább két Q típusú pontot. Legyenek ezek Q_s és Q_t. A Q_sQ_t egyenes a $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ sokszög kerületét két pontban metszi, jelöljük ezeket U-val és V-vel. Ha ezek közül az egyik, mondjuk U a sokszög P_i csúcsa volna, akkor V szükségképpen a sokszög valamely P_jP_k oldalának belső pontja lenne. Ekkor a $P_iP_jP_k$ háromszög a Q_s és a Q_t pontokat is tartalmazná, fenti állításunkkal ellentétben. Ha pedig U és V rendre a sokszög P_iP_j és P_kP_l oldalainak lenne belső pontja (feltehető, hogy P_i, P_j, P_k és P_l ilyen sorrendben, egy konvex négyszög csúcsai), akkor H-nak összes pontja, amely a Q_sQ_t egyenesre illeszkedik, a $P_iP_jP_kP_l$ négyszög belsejébe esne. Ez azonban lehetetlen, hiszen a fenti állításból könnyen levezethető, hogy ez a négyszög H-nak pontosan két pontját tartalmazza.

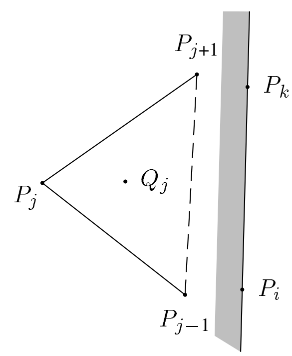
Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

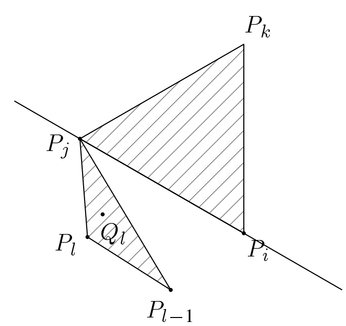
Megjegyzések. 1. Páros N esetén a keresett ponthalmaz létezésére indukciós bizonyítás is adható, amelyet csak vázolunk. Tegyük fel, hogy a $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ konvex sokszöget, és annak $Q_1, \dots, Q_{n-2}$ belső pontjait már meghatároztuk úgy, hogy semelyik 3 pont nem esik egy egyenesre, és minden $P_iP_jP_k$ háromszög belsejébe pontosan egy Q pont esik. Vegyük fel a P_n pontot úgy, hogy $P_0P_1 \dots P_{n-1}P_n$ konvex $(n+1)$-szög legyen, semelyik $P_nP_iP_{n+1}$ háromszög ne tartalmazzon egyetlen Q_j pontot sem, továbbá P_n ne legyen rajta egyik olyan egyenesen sem, amely az eddigi pontok közül kettőre már illeszkedik. „Látszik", hogy ezt mindig megtehetjük. A szabatos bizonyítás megfogalmazása azonban egyáltalán nem magától értetődő. Ezek után vegyük fel a Q_{n-1} pontot a $P_{n-1}P_iP_n$ $(0 \leq i \leq n-1)$ háromszögek közös részeinek belsejében, ami éppen a $P_{n-1}P_0P_n$ és $P_{n-1}P_{n-2}P_n$ háromszögek közös részének belseje. Eközben vigyázunk arra, hogy Q_{n-1} ne essék egyetlen olyan egyenesre sem, amelyeket az eddigi pontok meghatároznak. A keletkező $\{P_0,\ P_1,\ \dots,\ P_n,\ Q_1,\ \dots,\ Q_{n-1}\}$ ponthalmaz konvex burka éppen a $P_0P_1 \dots P_n$ sokszög, és semelyik 3 pontja nem esik egy egyenesre. Az indukciós feltevésből adódik, hogy a $P_iP_jP_k$ belsejébe pontosan egy pont esik, ha $n \notin \{i,\ j,\ k\}$. A Q_{n-1} pont konstrukciója alapján ugyanez elmondható a $P_{n-1}P_nP_i$ háromszögekről is. Végül tekintsük bármelyik $P_iP_jP_k$ háromszöget, ahol $i < j < n-1$. A $P_iP_jP_{n-1}P_n$ négyszögbe, melyet annak P_jP_{n-1} átlója a $P_nP_{n-1}P_j$ és a $P_{n-1}P_jP_i$ háromszögekre bont, az előzőek alapján pontosan 2 pont esik. Ezek egyike a Q_{n-1} pont, amely a $P_{n-1}P_nP_i$ háromszög egyetlen belső pontja a tekintett pontok közül. Ezért a másik pont szükségképpen a $P_iP_jP_{n-1}$ háromszögbe esik, és oda más pont nem is eshet (*4. ábra*).

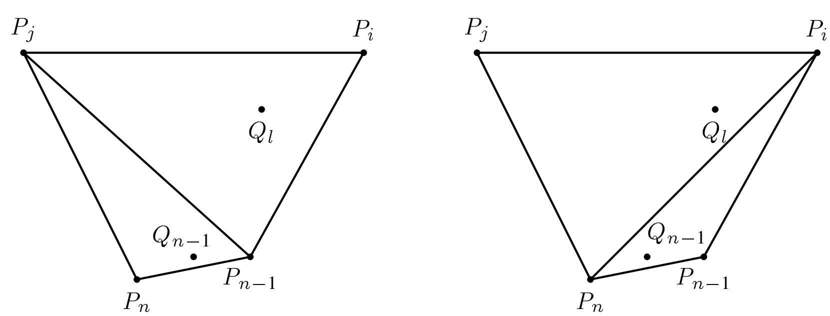
2. Ha az $n=3$ esetén felrajzolható, lényegében egyértelmű konstrukcióból kiindulunk, és arra a fenti indukció lépéseit alkalmazzuk, akkor az első megoldásban ismertetett konstrukcióhoz hasonló pontrendszerhez jutunk. Felmerülhet az a gondolat, hogy lehetséges-e „geometriailag más szerkezetű" ponthalmazokat is mutatni, amelyek a feltételeknek szintén megfelelnek. Ilyen ponthalmazokat is képezhetnénk az indukciós eljárás segítségével, ha nem ragaszkodunk ahhoz, hogy a P_0, P_1, $\dots$, P_n csúcspontokkal rendelkező konvex sokszög csúcsai éppen ilyen sorrendben kövessék egymást.

Az *5. ábrán* három különböző konstrukciót mutatunk $N = 10$ $(n=6)$ esetén.


P_k
P_{n-1}
P_j
Q_j
P_0
P_i


P_{j+1}
P_k
P_j
Q_j
P_i
P_{j-1}


P_k
P_j
P_l
Q_l
P_i
P_{l-1}


P_j
P_i
Q_l
Q_{n-1}
P_{n-1}
P_n
P_j
P_i
Q_l
Q_{n-1}
P_{n-1}
P_n