Először olyan p polinomot mutatunk, amely az egymástól különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ helyeken rendre az egymástól nem feltétlenül különböző $b_1, b_2, \ldots, b_n$ értékeket veszi fel. Ehhez tekintsük $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén a következő p_i polinomot:

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i 1 \leq j \leq n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

Világos, hogy $p_i(a_i) = 1$ és $p_i(a_j) = 0$, ha $j \neq i$. Ezért a $p(x) = b_1 \cdot p_1(x) + \cdots + b_n \cdot p_n(x)$ összefüggéssel definiált polinom, az ún. *Lagrange*-féle interpolációs polinom, megfelelő lesz. Könnyen látható, hogy ezen p polinom fokszáma legfeljebb $n - 1$. Azonban p még akkor sem lesz mindig egész együtthatós, ha $a_1, \ldots, a_n$ és $b_1, \ldots, b_n$ egész számok.

Legyen most $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_n = n$. Milyen $b_1, \ldots, b_n$ egész értékek mellett tudunk egyszerűen következtetni arra, hogy a p polinom együtthatói egész számok? A p polinom minden együtthatója olyan racionális szám, amelynek a nevezője valamilyen $1 \leq i \leq n$ indexre

$$\prod_{j \neq i 1 \leq j \leq n} (a_i - a_j) = (i-1)(i-2)\ldots(i-(i-1))(i-(i+1))\ldots(i-n) == (-1)^{n-i}(i-1)!(n-i)!$$

alakú, számlálója pedig ugyanekkor b_i-vel osztható egész szám. Könnyen látható, hogy az így adódó nevezők mindegyike osztója az $N = [(n-1)!]^2$ számnak. Ha tehát a b_i értékek mindegyike osztható N-nel, akkor a fenti konstrukcióval létrehozott p polinom egész együtthatós lesz.

Az általunk keresett polinomnak azonban az előírt helyeken 2-hatvány értékeket kell felvennie, azok pedig nem oszthatók N-nel, ha $n \geq 4$. Hogyan lehet ezen segíteni? Válasszunk ki n darab különböző 2-hatványt, ami ugyanannyi – mondjuk m – maradékot ad N-nel osztva. Ezt megtehetjük, hiszen végtelen sok különböző 2-hatvány van. Legyenek ezek $c_1, c_2, \ldots, c_n$, és tekintsük a $b_i = c_i - m$ $(1 \leq i \leq n)$ számokat. Ezekre igaz, hogy b_i osztható N-nel, létezik tehát olyan egész együtthatós polinom, amelyre $p(i) = b_i$ minden 1 és n közé eső i egész számra. Ennek a p polinomnak konstans tagját m-mel megnövelve olyan, továbbra is egész együtthatós p^* polinomhoz jutunk, amelyre $p^*(i) = c_i$. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. 1. A megoldásból kitűnik, hogy különböző 2-hatványok helyett különböző 3-hatványokat vagy éppen különböző prímszámokat is előírhattunk volna a keresett polinom $1, 2, \ldots, n$ helyen felvett értékeiként. Sőt, még ennél is tovább mehetünk. Mivel

$$\binom{n-1}{i-1} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}$$

egész szám, az $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_n = n$ alappontokra épített Lagrange-féle interpolációs polinom együtthatói már akkor is egész számok, ha minden b_i osztható $(n-1)!$-sal. A skatulya-elv szerint $(n-1)(n-1)! + 1$ szám között mindig található n olyan, amelyik $(n-1)!$-sal osztva ugyanolyan maradékot ad. Megfogalmazhatjuk tehát a következő, a feladatban szereplőnél erősebb állítást.

Legyen H egy legalább $(n-1)(n-1)! + 1$ elemű egész számokból álló halmaz. Ekkor létezik olyan, legfeljebb $(n-1)$-ed fokú egész együtthatós polinom, amelynek az $1, 2, \ldots, n$ helyeken felvett értékei a H különböző elemei.