Megmutatjuk, hogy létezik a feladat követelményeinek eleget tevő sorozat. Legyen ugyanis $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3, \ldots$ a prímszámok (végtelen) növekvő sorozata, és tekintsük az $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_n = 15 \cdot p_{n+1}$ $(n \geq 3)$ sorozatot.

Ebben a sorozatban a_n páratlan szám, ha $n \geq 3$, így nem osztható sem a_1-gyel, sem a_2-vel, hiszen azok páros számok. Az is világos, hogy a_1 és a_2 közül egyik sem osztója a másiknak. Ha pedig $n \geq 3$, akkor p_{n+1} osztója a_n-nek, de nem osztója a sorozat egyetlen további tagjainak sem, tehát a_n nem lehet osztója a sorozat egy másik elemének. Az első feltétel tehát teljesül.

A sorozatban bármely két számnak van 1-nél nagyobb közös osztója. Valóban: a_1 és a_2 esetén ez a szám 2; a_1 és a_n esetén 3, ha $n \geq 3$, végül ha n, $m \geq 2$, akkor a_n és a_m is osztható 5-tel. Tehát a második feltétel is teljesül.

Végezetül, ha egy pozitív egész osztója a sorozat minden elemének, akkor osztója a_1-nek és a_2-nak is, és így csak 1 vagy 2 lehet. A második lehetőség azonban könnyen kizárható, hiszen a_3 páratlan szám. Ezzel igazoltuk, hogy a sorozat a harmadik feltételt is kielégíti.

Megjegyzések. 1. A fenti sorozatban a második tagtól kezdve minden elem osztható 5-tel. Olyan sorozat is megadható, amelyben a sorozat elemeinek semelyik tagtól kezdve nem létezik 1-nél nagyobb közös osztója. Ilyen sorozat például az $a_{3n+1} = 6p_{n+4}$, $a_{3n+2} = 10p_{n+4}$, $a_{3n+3} = 15p_{n+4}$ $(n \geq 0)$ összefüggésekkel definiálható. Az is világos azonban, hogy bármely, a feladat feltételeinek eleget tevő sorozatban lesz végtelen sok elem, amelynek van 1-nél nagyobb közös osztója. (Miért?)

2. A sorozat konstrukciójánál mindenképpen szükség van végtelen sok különböző prímszám segítségére. Nem lehet ugyanis megadni véges sok prímszámot úgy, hogy legyen olyan pozitív egészekből álló végtelen sorozat, amelyben egyik szám sem osztója egyetlen másiknak sem, és amelyben minden szám összes prímosztója az adott prímszámok közül való.

Feladat. Bizonyítsuk be a fenti állítást.