Megoldás. Felhasználjuk az **N. 190.** feladatban igazolt segédtételeket.

A megoldás azon múlik, hogy a (3) egyenlőtlenségben egyenlőség áll, ha a $p(1)q(1)$, $p(2)q(2)$, $\ldots$, $p(n)q(n)$ számok váltakozó előjelűek.

IV. segédtétel. *Tetszőleges* $0<u,\ v<\pi$ *számokra*

$$|u-v|\le\sqrt{5|\cos u-\cos v|}. \tag{4}$$

Bizonyítás. Legyen $w=|u-v|$, ekkor $\dfrac{w}{2}\le\dfrac{u+v}{2}\le\pi-\dfrac{w}{2}$, és

$$|\cos u-\cos v|=\left|2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v-u}{2}\right|\ge 2\sin^2\frac{w}{2}\ge 2\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{w}{2}\right)^2=\frac{2}{\pi^2}w^2\ge\frac{1}{5}w^2.$$

Ezt átrendezve éppen (4)-et kapjuk.

Legyen $n\ge 100$, $m=\left[\dfrac{1}{10}\sqrt{n}\right]+1$, és ismét

$$q(x)=T_m\left(\frac{n+1-2x}{n-1}\right).$$

Legyen továbbá $j=0,\,1,\,\ldots,\,m$ esetén $a_j=\dfrac{n+1}{2}-\dfrac{n-1}{2}\cos\dfrac{\pi j}{m}$. A q polinom definíciója alapján

$$q(a_j)=q\left(\frac{n+1}{2}-\frac{n-1}{2}\cos\frac{\pi j}{m}\right)=T_m\left(\cos\frac{\pi j}{m}\right)=\cos(\pi j)=(-1)^j,$$

vagyis ezek azok a számok, ahol q értéke $+1$ vagy -1.

Jelöljük minden $j=0,\,1,\,\ldots,\,m$ esetén az a_j-hez legközelebbi egész számot b_j-vel.

V. segédtétel. *A* $b_0,\,b_1,\,\ldots,\,b_m$ *számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:*

1. $1=b_0<b_1<\cdots<b_m=n$;
2. $q(b_j)>\dfrac{1}{2}$ *ha* j *páros;*
3. $q(b_j)<-\dfrac{1}{2}$ *ha* j *páratlan.*

Bizonyítás. Az $a_0,\,a_1,\,\ldots,\,a_m$ számok definíciójából látható, hogy $1=a_0<a_1<\cdots<a_m=n$; ebből következik, hogy

$$1=b_0\le b_1\le\cdots\le b_m=n. \tag{5}$$

Tetszőleges $j=0,\,1,\,\ldots,\,m$ esetén legyen $c_j\in[0,\pi]$ az a szám, amelyre $b_j=\dfrac{n+1}{2}-\dfrac{n-1}{2}\cos c_j$.

A IV. segédtétel alapján

$$\left|c_j-\frac{\pi j}{m}\right|\le\sqrt{5\left|\cos c_j-\cos\frac{\pi j}{m}\right|}= \tag{6}$$

$$=\sqrt{5\left|\frac{2}{n-1}\left(\frac{n+1}{2}-b_j\right)-\frac{2}{n-1}\left(\frac{n+1}{2}-a_j\right)\right|}=\sqrt{\frac{10}{n-1}|a_j-b_j|}\le\sqrt{\frac{5}{n-1}}.$$

Mivel

$$q(b_j)=\cos mc_j=\cos\left(\pi j+m\left(c_j-\frac{\pi j}{m}\right)\right)=(-1)^j\cos m\left(c_j-\frac{\pi j}{m}\right),$$

és (6) alapján

$$m\left(c_j-\frac{\pi j}{m}\right)<\left(\frac{1}{10}\sqrt{n}+1\right)\sqrt{\frac{5}{n-1}}<\frac{\sqrt{n}}{5}\cdot\sqrt{\frac{5}{\frac{99}{100}n}}<\frac{\pi}{3},$$

a 2. és a 3. egyenlőtlenségek teljesülnek.

Mivel a $b_0,\,b_1,\,\ldots,\,b_m$ sorozat váltakozó előjelű, (5)-ben sehol sem állhat egyenlőség, vagyis az 1. egyenlőtlenségláncis igaz.

VI. segédtétel. $0<q(0)<5$.

Bizonyítás. A III. segédtétel 3. pontjához hasonlóan felhasználjuk, hogy

$$q(0)=T_m\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\mathrm{ch}\left(m\cdot\mathrm{ar\,ch}\,\frac{n+1}{n-1}\right).$$

Ebből azonnal következik, hogy $q(0)$ pozitív.

Mivel tetszőleges $u > 0$ esetén

$$\operatorname{ch} u = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{2k}}{(2k)!} > 1 + \frac{u^2}{2},$$

$$\operatorname{ch}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}}\right) > 1 + \frac{2}{n-1} = \frac{n+1}{n-1}, \quad \text{vagyis} \quad \operatorname{ar\,ch} \frac{n+1}{n-1} < \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

Mivel $m < \frac{1}{10}\sqrt{n} + 1 \leq \frac{1}{5}\sqrt{n} < \frac{1}{4}\sqrt{n-1}$, ebből következik, hogy

$$q(0) < \operatorname{ch}\left(\frac{1}{4}\sqrt{n-1} \cdot \frac{2}{\sqrt{n-1}}\right) = \operatorname{ch} \frac{1}{2} < 5.$$

Ezek után rátérhetünk a p polinom konstrukciójára. Legyenek $d_1 < d_2 < \cdots < d_{n-m-1}$ azok az 1 és n közötti egészek, amelyek nem szerepelnek a $b_1, b_2, \ldots, b_m$ számok között, és legyen

$$p(x) = (d_1 - x)(d_2 - x) \ldots (d_{n-m-1} - x). \tag{7}$$

Tetszőleges $0 \leq j < m$ esetén a p polinomnak a (b_j, b_{j+1}) intervallumban pontosan $b_{j+1} - b_j$ darab gyöke van, ezért $p(b_j)$ és $p(b_{j+1})$ azonos előjelű, ha b_j és b_{j+1} paritása ellentétes, és fordítva. Mivel pedig $q(b_j)$ és $q(b_{j+1})$ ellentétes előjelűek, $p(b_j)q(b_j)$ és $p(b_{j+1})q(b_{j+1})$ pontosan akkor azonos előjelű, ha b_j és b_{j+1} paritása megegyezik. Mivel $p(1)$ és $q(1)$ pozitívak, ebből egyszerűen következik, hogy páratlan $1 \leq k \leq n$ esetén $p(k)q(k)$ nemnegatív, páros k esetén pedig nempozitív.

Írjuk fel (1)-et a pq polinomra (ezt megtehetjük, mert pq foka $n-1$) az $x = 0$ választással, és rendezzük át a következőképpen:

$$p(0)q(0) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} p(k)q(k). \tag{8}$$

A p és q polinomok definíciója alapján $p(0) > 0$ és $q(0) > 0$, az előbbi megfontolások szerint pedig a jobb oldalon valamennyi tag nemnegatív, ezért (8)-at a következő formában is írhatjuk:

$$p(0) = \frac{1}{q(0)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |p(k)q(k)|.$$

A jobb oldalon $|q(k)| > \frac{1}{2}$ minden olyan esetben, amikor $p(k) \neq 0$; ezt és a VI. segédtételt figyelembe véve

$$p(0) < \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{|p(k)|}{2} = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |p(k)|.$$