A feltétel alapján $f(x^2) = 2x \cdot f(x)$. Tehát

$$f\left(x^3\right) = f\left(x \cdot x^2\right) = x \cdot f(x) + x^2 \cdot f\left(x^2\right) = x \cdot f(x) + 2x^3 \cdot f(x) = \left(2x^3 + x\right) \cdot f(x).$$

Ebből

$$f\left(x^4\right) = f\left(x \cdot x^3\right) = x \cdot f(x) + x^3 \cdot f\left(x^3\right) = x \cdot f(x) + \left(2x^6 + x^4\right) f(x) == \left(2x^6 + x^4 + x\right) f(x),$$

ugyanakkor

$$f\left(x^4\right) = f\left(x^2 \cdot x^2\right) = 2x^2 \cdot f\left(x^2\right) = 4x^3 \cdot f(x).$$

Tehát $4x^3 \cdot f(x) = (2x^6 + x^4 + x) \cdot f(x)$ teljesül minden 0 és 1 közötti x-re.

Ez vagy úgy teljesül, ha $f(x) = 0$, vagy ha $4x^3 = 2x^6 + x^4 + x$, aminek nyilván legfeljebb 6 megoldása lehet. Tehát véges sok kivétellel $f(x) = 0$.

Megmutatjuk, hogy $f(x)$ egyáltalán nem vehet föl a 0-tól különböző értéket. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, van olyan $x \in (0,\ 1)$, amelyre $f(x) \neq 0$. Ekkor $x^2 \in (0,\ 1)$, $x^2 < x$ és $f(x^2) = x \cdot f(x)$, tehát ha $f(x)$ nem 0, akkor $f(x^2)$ sem az.

Ezt folytatva kapjuk az $x_1 = x > x_2 = x_1^2 > x_3 = x_2^2 > \ldots$ 0 és 1 közé eső számok végtelen sorozatát úgy, hogy minden i-re $f(x_i) \neq 0$.

Láttuk viszont, hogy legfeljebb 6 ilyen szám létezhet, így az $f(x) \neq 0$ feltételezés ellentmondásra vezet.

A feladat egyetlen megoldása tehát az azonosan 0 függvény.

Pap Júlia (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 12. o.t.)