

Jelölje a  $k$ -edik napon evés előtt még meglévő mogyorók számát  $e(k)$ , amiből  $k$  mogyoró elfogyasztása után  $u(k)$  marad; így

$$(1) \quad e(k) = u(k) + k \quad (k \leq n).$$

Ezután a mókus még megeszik  $\frac{u(k)}{100}$  darab mogyorót, tehát  $u(k) = \frac{u(k)}{100} = e(k+1)$ , azaz

$$(2) \quad u(k) = \frac{100}{99}e(k+1) \quad (k \leq n-1).$$

Tudjuk, hogy  $e(n) = n$ , így  $u(n-1) = \frac{100}{99}n$ . Ennek, valamint (1)-nek és (2)-nek az alapján a mókus eredeti mogyorókészlete:

$$S = e(1) = 1 + u(1) = 1 + \frac{100}{99}e(2) = 1 + \frac{100}{99}(u(2) + 2) = 1 + \frac{100}{99} \left( 2 + \frac{100}{99}e(3) \right) = 1 + \frac{100}{99} \left( 2 + \frac{100}{99}(u(3) + 3) \right) = \dots = 1 + \frac{100}{99}e(n) = 1 + \frac{100}{99}n.$$

Mivel az  $S$  egész, azért  $100^n(n-99)$  osztható  $99^{n-1}$ -nel. Ez két extrém esetben biztosan teljesül: ha  $n = 1$  (és akkor  $S = 1$ ) vagy ha  $n = 99$  (és akkor  $S = 99^2 = 9801$ ). Könnyen látható, hogy ez a két eset valóban megoldása a feladatnak; megmutatjuk viszont, hogy több megoldás nincs, ugyanis  $2 \leq n \neq 99$  esetén az oszthatóság nem áll fenn.

Mivel 99 és 100 egymáshoz relatív prímek, azért az oszthatóság (akkor és) csak akkor teljesül, ha  $n-99$  is osztható  $99^{n-1}$ -nel. Az  $1 < n$ -re való indukcióval azonban belátjuk, hogy  $|n-99| < 99^{n-1}$ , ezért a mondott eseteken kívül nem állhat fenn az oszthatóság.

Nyilván ( $n = 2$ -re és  $100$ -ra)  $97 < 99$  és  $1 < 99^{99}$ ; tegyük fel, hogy valamilyen  $(k-1)$ -re  $|(k-1) - 99| < 99^{k-2}$  teljesül, és  $k \neq 100$ .

Ekkor

$$99^{k-1} = 99 \cdot 99^{k-2} > 99 \cdot |(k-1) - 99| \geq 1 + |(k-1) - 99| \geq |k - 99|,$$

tehát az egyenlőtlenség  $k$ -ra is fennáll, így minden  $n$ -re teljesül.

*Szép László* (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján