A $T_aT_bT_c$ háromszöget *talpponti háromszögnek* nevezzük. Ennek kerülete

$$a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma, \tag{1}$$

aminek igazolása megtalálható például *Reiman István:* A geometria és határterületei c. könyve 241. oldalán. Az *ábra* derékszögű háromszögeiből $T_aC = b. \cos\gamma$, $T_bA = c \cdot \cos\alpha$ és $T_cB = a \cdot \cos\beta$. A feladatban említett szakaszok összege tehát

$$a \cdot cos\beta + b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha. \tag{2}$$

Az (1) és (2) összehasonlításához felhasználjuk az úgynevezett *rendezési tételt.* Legyenek a, b, c és x, y, z valós számok, és nézzük az

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z \tag{3}$$

összeget. Ha ebben az összegben az x, y, z számokat más sorrendben írjuk, az összeg megváltozik. Legyen pl. $a \le b \le c$ és $x \ge y \ge z$. Ekkor azt mondjuk, hogy a, b, c és x, y, z *ellentétesen rendezettek.* A rendezési tétel azt mondja ki, hogy (3) akkor a legkisebb, ha a két számhármas ellentétesen rendezett, és akkor a legnagyobb, ha a két számhármas rendezése azonos.

Visszatérve az eredeti feladathoz, megtehetjük, hogy az oldalak jelölését úgy választjuk meg, hogy $a \le b \le c$ legyen. A háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, nagyobb hegyesszög koszinusza pedig kisebb, mint a kisebb szögeké. Ezért a, b, c és $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ellentétesen rendezettek, tehát az (1) összeg nem nagyobb, mint a (2)-ben lévő.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha $a = b = c$.

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. Vegyünk fel egy hegyesszögű háromszög mindegyik oldalán egy belső pontot. A 3 pont egy beírt háromszöget határoz meg. Ismert szélsőérték-feladat, hogy ezek közül a háromszögek közül a talpponti háromszög a legkisebb kerületű. Ennek a ténynek és sok érdekes következményének a bizonyítása megtalálható a korábban idézett mű 240–242. oldalán.

2. A rendezési tétel egy általánosabb megfogalmazását és igazolását megtalálhatjuk *Reiman István:* Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–1994 c. könyve 552. oldalán.