Először is megjegyezzük, hogy a jobb oldalon a 2 helyett nem írható kisebb szám. Ha ugyanis $a_m = \dfrac{1}{m}$ tetszőleges m indexre, akkor

$$a_1 = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} + \cdots + \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1+2+\cdots+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1},$$

ezért

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_k}} = 2\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} = 2 - \frac{2}{n+1} < 2.$$

Ugyanakkor, mint ismeretes, n növelésével a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ összeg bármilyen nagy lehet.

Írjuk fel ezután a súlyozott harmonikus és számtani közepek közötti egyenlőséget az a_1, $2a_2$, $3a_3$, $\ldots$, ka_k számokra az 1, 2, $\ldots$, k súlyokkal:

$$\frac{1+2+\cdots+k}{1\cdot\frac{1}{a_1} + 2\cdot\frac{1}{2a_2} + \cdots + k\cdot\frac{1}{ka_k}} = \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_k}} \le$$
$$\le \frac{a_1 + 2\cdot 2a_2 + \cdots + k\cdot ka_k}{1+2+\cdots+k} = \frac{1^2\cdot a_1 + 2^2\cdot a_2 + \cdots + k^2 a_k}{\frac{k(k+1)}{2}},$$

vagyis

$$\frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}} \le \frac{4}{k(k+1)^2}(1^2\cdot a_1 + 2^2\cdot a_2 + \cdots + k^2\cdot a_k). \tag{1}$$

Ennek az egyenlőtlenségnek az a nagy előnye, hogy az $a_m = \dfrac{1}{m}$ választás esetén egyenlőség áll.

Összeadva (1)-et a $k = 1, 2, \ldots, n$ értékekre, valamint felhasználva a beszorzással könnyen ellenőrizhető $\dfrac{4}{k(k+1)^2} < \dfrac{2}{k^2} - \dfrac{2}{(k+1)^2}$ egyenlőtlenséget,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{m=1}^{k} m^2 a_m =$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=m}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \right) \cdot m^2 a_m < \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{2}{k^2} - \frac{2}{(k+1)^2} \right) \right) \cdot m^2 a_m =$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{m^2} \cdot m^2 a_m = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Ezzel az állítást igazoltuk.