Az $f(x)=x+\frac{n}{x}$ függvényt vizsgáljuk a pozitív egész számok halmazán.

$$f(x)<f(x+1) \ \Leftrightarrow \ x+\frac{n}{x}<x+1+\frac{n}{x+1} \ \Leftrightarrow \ n\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)<1 \ \Leftrightarrow \ n<x(x+1).$$

Nyilvánvalóan mindig pontosan egy olyan p pozitív egész szám van, amelyre

$$p^2 \le n < p^2+p \quad \text{vagy} \quad p^2+p \le n < (p+1)^2.$$

Ekkor

$$p+\frac{n}{p}<p+1+\frac{n}{p+1}, \qquad \text{ha} \quad n<p^2+p$$

és

$$p+\frac{n}{p}\ge p+1+\frac{n}{p+1}, \qquad \text{ha} \quad n\ge p^2+p.$$

Azaz, ha $p^2\le n<p^2+p$, akkor

$$[b(n)]=\left[p+\frac{n}{p}\right]=p+\left[\frac{n}{p}\right].$$

Mivel $p\le \frac{n}{p}<p+1$, azért ebben az esetben $\left[\frac{n}{p}\right]=p$, és így $[b(n)]=2p$. Továbbá

$$2p<\sqrt{4p^2+1}\le\sqrt{4n+1}<\sqrt{4p(p+1)+1}=2p+1,$$

mint az feltevésünkből adódik, s innen $\left[\sqrt{4n+1}\right]=2p=[b(n)]$ következik.

Ha pedig $p^2+p\le n<(p+1)^2<(p+1)(p+2)$, akkor

$$[b(n)]=\left[p+1+\frac{n}{p+1}\right]=p+1+\left[\frac{n}{p+1}\right],$$

s mivel $p\le\frac{n}{p+1}<p+1$, azért $\left[\frac{n}{p+1}\right]=p$, és így $[b(n)]=2p+1$. Továbbá

$$2p+1\le\sqrt{4n+1}\le\sqrt{((p+1)^2-1)+1}<2p+2,$$

ahonnan $\left[\sqrt{4n+1}\right]=2p+1$ adódik.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Baharev Ali (Budapest, Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., 10. o.t.)