

A tetraéder csúcsait jelölje A, B, C és D , a csúcsokkal szemközti lapok területét rendre T_A, T_B, T_C és T_D , a hozzájuk tartozó magasságokat pedig m_A, m_B, m_C és m_D .

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$(1) \quad T_A \leq T_B \leq T_C \leq T_D.$$

A tetraéder térfogata: $V = \frac{\text{alapterület} \cdot \text{magasság}}{3}$.

Mivel bármelyik lapot tekinthetjük alapnak, azért

$$T_A \cdot m_A = T_B \cdot m_B = T_C \cdot m_C = T_D \cdot m_D;$$

ebből az (1) feltevés miatt következik, hogy

$$m_A \geq m_B \geq m_C \geq m_D.$$

Mivel a tetraéderbe írt gömb a négy lap mindegyikét érinti, középpontja minden laptól sugárnyi, azaz R távolságra van.

Írjuk most fel a tetraéder térfogatát azon gúla térfogatának összegeként, amelyeknek alapja a tetraéder egy-egy lapja, magassága pedig R . Ekkor

$$V = \frac{T_A \cdot m_A}{3} = \frac{T_A \cdot R}{3} + \frac{T_B \cdot R}{3} + \frac{T_C \cdot R}{3} + \frac{T_D \cdot R}{3},$$

ahonnan

$$(2) \quad m_A = R \frac{T_A + T_B + T_C + T_D}{T_A} = R \left(1 + \frac{T_B}{T_A} + \frac{T_C}{T_A} + \frac{T_D}{T_A} \right).$$

Mivel az (1) feltevés szerint T_B, T_C és T_D egyike sem kisebb T_A -nál, $\frac{T_B}{T_A} \geq 1, \frac{T_C}{T_A} \geq 1, \frac{T_D}{T_A} \geq 1$, így (2) jobb oldalát tovább csökkentve azt kapjuk, hogy

$$m_A \geq 4R = 2d.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $T_A = T_B = T_C = T_D$, vagyis ha a tetraéder lapjainak területe egyenlő. Meglepő, de ebből még nem következik, hogy a tetraéder szabályos.

Birkner Tamás (Budapest, Deutsche Schule, 6. o.t.)

Megjegyzés. Sokan csak szabályos tetraéderre igazolták az állítást. (Ők 1 pontot kaptak.) A szabályos tetraéder minden magassága egyenlő: $m_i = 4r$. Érdekes azonban, hogy $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{m_i} = \frac{1}{r}$ miatt $m_i = 4r$ minden i -re pontosan akkor áll fenn, ha $T_1 = T_2 = T_3 = T_4$ (T_i az i -edik lap területe). Szinte minden beküldő úgy gondolta, hogy ebből következik a tetraéder szabályos volta. Ez nem igaz, a feltétel az úgynevezett *egyenlő oldalú* tetraéderre is teljesül. *Birkner Tamás* ezért az észrevételéért kapott 6 pontot. (Az egyenlő oldalú tetraéderről bővebben olvashatunk *Reiman István: A geometria és határterületei* c. könyvének (Gondolat, 1986) 84. oldalán.)