A jelölt intervallumba eső számok a $2^n+1, \ldots, 2^{n+1}-1$, olyan számtani sorozatot alkotnak, amelyben $a_1 = 2^n+1$, $a_m = 2^{n+1}-1$, a tagok száma pedig: $m = 2^n - 1$. A számok összege így

$$S_n = (2^n - 1)\frac{2^n + 1 + 2^{n+1} - 1}{2} = (2^n - 1)3 \cdot 2^{n-1},$$

ami valóban osztható 3-mal.

S_n akkor osztható 9-cel is, ha $2^n - 1$ is osztható 3-mal. (2^{n-1} biztos, hogy nem lehet 3-mal osztható.)

Legyen n páros: $n = 2k$. Ekkor $2^n - 1 = 2^{2k} - 1 = 4^k - 1^k$, s ez a különbség mindig osztható az alapok különbségével, 3-mal.

Ha n páratlan, $n = 2k+1$, akkor

$$2^n - 1 = 2^{2k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{2k} - 1 = 2 \cdot 2^{2k} - 2 + 1 = 2(2^{2k} - 1) + 1.$$

Az előbbiek szerint az első tag osztható 3-mal, ezért az összeg 3-mal osztva 1-et ad maradékul.

Ekkor tehát S_n nem osztható 9-cel.

Az S_n ezért pontosan akkor osztható 9-cel, ha n páros.

Kovács 494 Andrea (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

Megjegyzés. Medve Kinga (Eger, Dobó István Gimn.) megjegyezte, hogy számára a feladat szövegéből nem derült ki, hogy nyílt vagy zárt intervallumról van-e szó, ezért megoldotta a feladatot zárt intervallumra is.

Ekkor

$$S_n = \frac{2^n + 2^{n+1}}{2}(2^n + 1) = 3 \cdot 2^{n-1}(2^n + 1).$$

Ez pedig akkor osztható 9-cel, ha n páratlan, mert a 2 páratlan egész hatványai 3-mal osztva 2 maradékot adnak.