

Az a_0, b_0 pozitív számokból kiindulva képezzük az $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ és a $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ sorozatot, úgy, hogy ha az a_n, b_n elemeket már meghatároztuk, akkor legyen

$$(1) \quad a_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Igazoljuk, hogy a két sorozat közös határértéke a_0 és b_0 mértani közepe. Határozzuk meg ennek alapján $\sqrt{21}$ értékét három tizedes pontossággal.