Tetszőleges n nemnegatív egész számra legyen u_n és v_n az a két nemnegatív egész, amelyre $\left(2\pm\sqrt{3}\right)^n=u_n\pm v_n\sqrt{3}$. Mivel $\sqrt{3}$ irracionális, ez a felírás egyértelmű.

Mivel $0<(2-\sqrt{3})^n<2$ és

$$\frac{(2+\sqrt{3})^n}{2}<u_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}<\frac{(2+\sqrt{3})^n}{2}+1,$$

az $\left[\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n\right]$ alakú számok éppen az $u_0, u_1, \ldots$ sorozat elemei. A feladat tehát olyan polinom felírása, amelynek pozitív értékei az $u_0, u_1, \ldots$ számok.

Megmutatjuk, hogy az

$$x^2-3y^2=1 \tag{1}$$

diofantikus egyenlet megoldásai a $(\pm u_n, \pm v_n)$ alakú számpárok.

Mivel $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$, tetszőleges n-re

$$u_n^2-3v_n^2=\left(u_n+v_n\sqrt{3}\right)\left(u_n-v_n\sqrt{3}\right)=\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n=1,$$

vagyis az (u_n, v_n) alakú számpárok valóban megoldásai (1)-nek.

A megfordításhoz elég igazolni, hogy ha x, y nemnegatív egészek és az $(x,\ y)$ számpár megoldás, akkor $x+y\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^n$ valamilyen n nemnegatív egész számra.

Legyen n az a nemnegatív egész szám, amelyre

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n\le x+y\sqrt{3}<\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}. \tag{2}$$

Ilyen létezik, mert (1) miatt x és y nem lehet egyszerre 0, és ezért $x+y\sqrt{3}\ge 1$.

Osszuk el a (2) egyenlőtlenséget $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$-nel:

$$1\le\frac{x+y\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^n}<2+\sqrt{3}, \tag{3}$$

ugyanakkor

$$\frac{x+y\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^n}=\left(2-\sqrt{3}\right)^n\left(x+y\sqrt{3}\right)=\left(u_n-v_n\sqrt{3}\right)\left(x+y\sqrt{3}\right)==(u_nx-3v_ny)+(u_ny-v_nx)\sqrt{3}. \tag{4}$$

Legyen $U=u_nx-3v_ny$ és $V=u_ny-v_ny$. Ekkor (3) és (4) szerint

$$1\le U+V\sqrt{3}<2+\sqrt{3} \tag{5}$$

és

$$U^2-3V^2=(u_nx-3v_ny)^2-3(u_ny-v_nx)^2=(u_n^2-3v_n^2)(x^2-3y^2)=1\cdot 1=1. \tag{6}$$

(6)-ot elosztva (5)-tel

$$2-\sqrt{3}<U-V\sqrt{3}\le 1.$$

Ezt (5)-höz hozzáadva és 2-vel osztva

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2}<U<\frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

vagyis $U=1$ vagy $U=2$. Az első esetben (6) alapján $V=0$, $U+V\sqrt{3}=1$ és $u+v\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^n$. A második esetben (5) alapján $-\frac{1}{\sqrt{3}}\le V<0$, ami nem lehetséges.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az (1) egyenlet megoldásai a $(\pm u_n, \pm v_n)$ alakú számpárok.

Tekintsük most a következő polinomot:

$$P(x,\ y)=x-\left(x^2+1\right)\left(x^2-3y^2-1\right)^2.$$

Megmutatjuk, hogy ennek nemnegatív értékei pontosan az $u_0, u_1, \ldots$ számok.

Tetszőleges n nemnegatív egészre, mivel $u_n^2-3v_n^2-1=0$, $P(u_n,\ v_n)=u_n$. A P polinom értékkészletében tehát szerepelnek az $u_0,\ u_1,\ \ldots$ számok.

Ha az x, y egész számokra $x^2-3y^2-1\neq 0$, akkor

$$P(x,\ y)\leq x-\left(x^2+1\right)<0.$$

Ha viszont $x^2-3y^2-1=0$, akkor a segédtétel miatt $x=u_n$ vagy $x=-u_n$ valamilyen n-re. Az első esetben $P(x,\ y)=u_n$, a második esetben $P(x,\ y)<0$.

A P polinom tehát megfelelő.

Juhász András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn, 12. o.t.) *Terpai Tamás* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn, 12. o.t.)

dolgozata alapján