Az a és b egymáshoz relatív prímek, hiszen pl. az a osztója a b-hez relatív prím (b^2+b+1)-nek. Így az egyetlen olyan megoldás, amelyre $a=b$, az $a=b=1$. Tegyük fel ezután, hogy $a<b$, és $ab^+=b^2+b+1$, $ba^-=a^2+a+1$.

Ekkor $bb^+>ab^+=b^2+b+1>b(b+1)$ miatt $b^+>b$, hasonlóan $(a+1)a^-\le ba^-=a^2+a+1<(a+1)(a+1)$ szerint $a^-\le a$, és így – mivel a^- osztója az a-hoz relatív prím (a^2+a+1)-nek – $a^-<a$ vagy $a^-=a=1$.

Megmutatjuk, hogy a, b-hez hasonlóan az a^-, a és a b, b^+ párok is eleget tesznek a feladat feltételeinek. Nyilván $a^-\mid ba^-=a^2+a+1$ és $b^+\mid ab^+=b^2+b+1$. Mivel a és b egymáshoz relatív prímek, elég igazolni, hogy

$$a\mid b^2(a^-)^2+a^-+1)\qquad\text{és}\qquad b\mid a^2((b^+)^2+b^++1).$$

Az első oszthatóság igazolásához használjuk $ba^-=a^2+a+1$-et:

$$b^2((a^-)^2+a^-+1)=(a^2+a+1)^2+b(a^2+a+1)+b^2=ax+(1+b+b^2),$$

és ez valóban osztható a-val; hasonlóan láthatjuk be a második oszthatóság teljesülését is.

Tehát az $a<b$ megoldásból „lefelé" és „felfelé" is tovább lépve megkaphatjuk az $a^-\le a<b<b^+$ sorozatot, amelynek bármely két szomszédos eleme megoldás, és ezt ugyanígy folytathatjuk tovább, mindkét irányban. Észrevehetjük, hogy a sorozatot bármelyik két szomszédos eleme már meghatározza, hiszen $b^+=\dfrac{b^2+b+1}{a}$-hoz hasonlóan például $b=\dfrac{a^2+a+1}{b^-}$.

Vizsgáljuk meg, hová jutunk, ha $a<b$-ből indulva a sorozatot „lefelé" folytatjuk, ameddig csak lehetséges. Legyen $a_{-1}=a^-=\dfrac{a^2+a+a}{b}$, $a_{-2}=\dfrac{a_{-1}^2+a_{-1}+1}{a}$ s.í.t. A sorozat ebben az irányban akkor ér véget, amikor $a_{-(n+1)}=a_{-n}$, azaz $a_{-(n+1)}=a_{-n}=1$. Ekkor $a_{-(n-1)}=\dfrac{a_{-n}^2+a_{-n1}+1}{a_{-(n+1)}}=3$, $a_{-(n-2)}=\dfrac{a_{-(n-1)}^2+a_{-(n-1)}+1}{a_{-n}}=13$ stb.; az a, b pár tehát két szomszédos eleme annak az $x_1<x_2<\dots$ sorozatnak, amelyet az $x_1=1$, $x_2=3$, $x_{i+1}=\dfrac{x_i^2+x_i+1}{x_{i-1}}$ rekurzió definiál. Ennek a sorozatnak bármely két szomszédos eleme valóban megoldást ad, hiszen az $(1,\ 3)$ pár megoldás.

Megjegyzések. 1. A megoldás ötlete a következő gondolatból származik.

Ha az $(a,\ b)$ számpár megoldás, akkor az $a^2+a+(b^2+b+1)=(a^2+a+1)+b^2+b$ szám osztható a-val és b-val. Mivel a és b relatív prímek, ab-vel is osztható, vagyis egy megfelelő K pozitív egésszel

$$a^2+b^2+a+b+1=Kab. \tag{1}$$

Ennek a megfordítása is igaz, ha az a, b, K pozitív egészekre (1) teljesül, akkor a^2+a+1 osztható b-vel és b^2+b+1 osztható a-val.

Tekintsük most a

$$t^2-(Kb-1)t+(b^2+b+1)=0$$

másodfokú egyenletet. Ennek egyik gyöke $t_1=a$. A másik gyöke a Vièta-formulák alapján

$$t_2=(Kb-1)-a=\frac{b^2+b+1}{a}.$$

Az első felírásból látszik, hogy t_2 egész szám, a másodikból pedig, hogy pozitív.

2. Az előbbi lépés többszöri megismétlésével az (1) egyenlet tetszőleges $(a,\ b,\ K)$ megoldásából további megoldásokat állíthatunk elő. Könnyű meggondolni, hogy kellő számú lépést megtéve eljuthatunk az $(1,\ 1,\ K)$ megoldáshoz. Ebből következik, hogy csak $K=5$ lehetséges, és az (x_n) sorozatot az

$$x_0=x_1=1,\quad x_{n+1}=5x_n-x_{n-1}-1 \tag{2}$$

rekurzióval is definiálhatjuk.

3. A (2) a rekurzióból x_n explicit alakban is felírható:

$$x_n=\frac{1}{3}+\frac{7-\sqrt{21}}{21}\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n+\frac{7+\sqrt{21}}{21}\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n.$$