Vezessük be az $a=(n,\ k)$, $b=(k,\ m)$ és $c=(m,\ n)$ jelöléseket. Ekkor nyilván $(a,\ b)=(b,\ c)=(c,\ a)=(a,\ b,\ c)=(n,\ k,\ m)$. Jelöljük ezt a számot A-val. Először megmutatjuk, hogy most az A értéke 1, vagy 2.

Az A osztja a-t, b-t és c-t, ezért osztja e számok négyzetét, így az ezekkel a feltétel szerint egyenlő $n+k$, $k+m$ és $m+n$ összegeket is. Így osztója az ezekből az összegekből készített $(n+k+k+m-(m+n))=2k$, és ugyanígy a $2n$ és a $2m$ mennyiségeknek. Osztója tehát ezek legnagyobb közös osztójának, $(2k,\ 2n,\ 2m)=2(k,\ n,\ m)=2A$-nak is. Ha viszont $A^2\mid 2A$, akkor innen $A\mid 2$, azaz valóban $A=1$ vagy $A=2$ következik.

Mivel n osztható a-val és c-vel, osztható legkisebb közös többszörösükkel is és így természetesen legalább akkora, mint az

$$n\ge [a,\ c]=\frac{ac}{(a,\ c)}=\frac{ac}{A}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $k\ge \dfrac{ab}{A}$ és $m\ge \dfrac{bc}{A}$. Az első két egyenlőtlenséget összeadva $a^2=n+k\ge \dfrac{ac+ab}{A}$, azaz

$$A\cdot a\ge b+c.(1) Rendreugyangykapjuka A\cdot b\ge c+a(2) sa A\cdot a\ge b+c(3)$$

egyenlőtlenségeket, végül ezek összegeként, hogy

$$A\cdot(a+b+c)\ge 2\cdot(a+b+c).$$

Így $A\ge 2$, vagyis a már igazolt $A\mid 2$-vel egybevetve csak $A=2$ lehetséges. Ekkor persze az $A\cdot(a+b+c)\ge 2\cdot(a+b+c)$ egyenlőtlenségben egyenlőség áll. Ez pedig azt jelenti, hogy az (1), (2), (3) egyenlőtlenségekben is egyenlőség van, azaz $2a=b+c$, $2b=a+c$ és $2c=a+b$. Innen pedig $a=b=c$ következik, és $A=(a,\ b,\ c)=2$ miatt a közös értékük 2.

Végül pedig $n+k=k+m=m+n=A^2=4$, tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $k=n=m=2$.

Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9 o.t.) és *Kunszenti-Kovács-Dávid* (Oslo, Lycée Francais René

Cassin) dolgozatai alapján

Megjegyzések. 1. Felhasználva az $A\le 2$ eredményt, *Kiss 345 Gergely* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) ötlete alapján érdekes geometriai bizonyítás adható az $a=b=c$ egyenlőségre.

Az a, b, c számok közül bármely kettő négyzetösszege nagyobb a harmadik négyzeténél: például

$$a^2+b^2=n+k+k+m>n+m=c^2.$$

Így, mivel $(a+b)^2>a^2+b^2$, bármely kettő összege is nagyobb, mint a harmadik. Ez azt jelenti, hogy az a, b, c hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető és ez az oldalak négyzeteire teljesülő egyenlőtlenségek miatt hegyesszögű.

Írjuk fel erre a háromszögre a koszinusztételt:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

azaz

$$n+m=n+k+k+m-2ab\cos\gamma,$$

tehát

$$ab\cos\gamma=k.$$

Mivel a k többszöröse az a-nak és a b-nek, azért a legkisebb közös többszörösükkel, $[a,\ b]$-vel is osztható. Másrészt

$$ab=[a,\ b]\cdot(a,\ b)=[a,\ b]\cdot A,\qquad \text{így}\qquad k=ab\cos\gamma=[a,\ b]\cdot A\cdot\cos\gamma,$$

tehát $A\cos\gamma$ pozitív egész szám. Láttuk, hogy $A=1$ vagy 2 és $0^\circ<\gamma<90^\circ$ miatt $0<\cos\gamma<1$, így csak $\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$ lehetséges (és $A=2$). A γ szög tehát 60°. A szimmetria miatt ekkor az a, b, c oldalú háromszög minden szöge 60°, így $a=b=c$ valóban.

2. A feladat nehéz volt, csak 4 jó megoldást kaptunk. A hibák leggyakoribb oka a következő hibás állítás volt: ha $ab=cd$ és $(a,\ c)=1$, akkor $a=d$ és $b=c$. Ez így nyilván nem igaz, hiszen átrendezve $t=\dfrac{a}{c}=\dfrac{d}{b}$, a bal oldalon a t tört redukált alakja áll, a jobb oldalon pedig tetszőleges alak. Az $a=d$ és $b=c$ következtetés csak akkor jogos, ha $(a,\ c)=1$ mellett a másik két tényező is relatív prím.