Legyenek az ABC háromszög oldalai a, b és c. Tekintsünk egy olyan gúlát (*1. ábra*), amelynek M csúcsából kiinduló élei páronként merőlegesek, és az élek hossza rendre

$$MC_1 = \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}, \quad MB_1 = \sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}},$$
$$MA_1 = \sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}.$$

Ilyen gúla nyilván létezik, hiszen az ABC háromszög hegyesszögű. Azt fogjuk bizonyítani, hogy ennek a gúlának a hálózata egybevágó a feladatbeli hatszöggel.

Számítsuk ki először az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalait. A Pithagorasz-tétel szerint

$$B_1C_1 = \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2}} = \sqrt{a^2} = a.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy a másik két oldal b, illetve c. Az $A_1B_1C_1$ háromszög tehát egybevágó az ABC háromszöggel.

Húzzunk most merőlegest M-ből a B_1C_1-re, legyen ennek talppontja T_1. Mivel MA_1 merőleges MB_1 és MC_1-re, merőleges az MB_1C_1 háromszög síkjára, tehát B_1C_1-re is. Így B_1C_1 merőleges lesz az A_1MT_1 háromszög síkjára, amiből következik, hogy $A_1T_1 \perp B_1C_1$. Ezért, ha az MB_1C_1 lapot az a oldal körül az $A_1B_1C_1$ háromszög síkjába forgatjuk, M képe – ami a *2. ábrán* M_1 – éppen az $A_1B_1C_1$ háromszög A_1-ből húzott magasságvonalának és és a B_1C_1 oldal Thalesz-körének (egyik) metszéspontja lesz. Hasonló igaz az M_2 és M_3 pontokra.

A leírtakból következik, hogy a *2. ábrán* $A_1M_3B_1M_1C_1M_2$ az első ábra gúlájának hálózata.

Gyenes Zoltán (Budapest, Apáczai Cs. J. Gimn., 10. o.t.)