Nyilvánvalóan teljesül az $(a_i - 2k)^2 \geq 0$ egyenlőtlenség. A zárójelet felbontva adódik, hogy $a_i^2 \geq 4ka_i - 4k^2 = 4k(a_i - k)$.

$a_i > k$ miatt innen

$$\frac{a_i^2}{a_i - k} \geq 4k.$$

Szorozzuk össze a kapott egyenlőtlenségeket $i = 1, 2, \ldots, n$-re, rendezzük át a szorzatban a nevezők sorrendjét, majd alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget. Ezt nyilván megtehetjük, mert minden mennyiség pozitív.

$$4^n k^n \leq \frac{a_1^2}{a_1 - k} \cdot \frac{a_2^2}{a_2 - k} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n^2}{a_n - k} = \frac{a_1^2}{a_2 - k} \cdot \frac{a_2^2}{a_3 - k} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n^2}{a_1 - k} \leq$$
$$\leq \left(\frac{\frac{a_1^2}{a_2 - k} + \frac{a_2^2}{a_3 - k} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_1 - k}}{n} \right)^n.$$

Innen n-edik gyökvonással és átrendezéssel kapjuk, hogy

$$4kn \leq \frac{a_1^2}{a_2 - k} + \frac{a_2^2}{a_3 - k} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_1 - k},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. Az egyenlőséghez szükséges, hogy teljesüljön $(a_i - 2k)^2 = 0$, azaz $a_i = 2k$. Ezt behelyettesítve látható, hogy az egyenlőség ekkor valóban fenn is áll.

Megjegyzés. A megoldásból egyszerűen látszik a következő általánosítás is: ha a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ számok az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valamilyen permutációja, akkor

$$4kn \leq \frac{a_1^2}{b_1 - k} + \frac{a_2^2}{b_2 - k} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n - k}.$$