Ha $(x,\ y)$ egész megoldása a fenti egyenletrendszernek, akkor nyilván $(-x,\ y)$, $(-x,\ -y)$ és $(x,\ -y)$ is megoldásai, tehát feltehetjük, hogy $x>0$, $y>0$. Másrészt a két egyenletből nyilvánvaló, hogy $y>x$ és hogy $p>y$, tehát $p>x$ is, azaz $2p>x+y$.

Vonjuk ki eredeti második egyenletünkből az elsőt:

$$p^2-p=2(y^2-x^2)$$

innen

$$p\cdot\frac{p-1}{2}=(y+x)(y-x). \tag{1}$$

Mivel $p=2$ esetén nincs a fenti egyenletrendszernek egész megoldása, így $p$ páratlan, tehát $\frac{p-1}{2}$ egész. Mivel $p$ prím, így a jobb oldali szorzat valamelyik tényezőjének osztója kell, hogy legyen.

A $p$ nem lehet osztója $(y-x)$-nek, hiszen láttuk, hogy $0<y-x<y<p$. Ezért biztosan $(y+x)$-nek osztója $p$, tehát $x+y=k\cdot p$ ($k\geq 1$ egész). A megoldás elején viszont megállapítottuk, hogy $2p>x+y$, így csak $k=1$ lehet. Tehát $x+y=p$, és így $y-x=\frac{p-1}{2}$ kell, hogy legyen. Ezt a két egyenletet összeadva $2y=p+\frac{p-1}{2}$-ből $y=\frac{3p-1}{4}$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$p^2+1=2\cdot\frac{(3p-1)^2}{16},$$

amit átrendezve a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$p^2-16p-7=0.$$

Ennek megoldásai $p_1=7$, $p_2=-1$. Közülük a $p=7$ prím, így csak ebben az esetben van az eredeti egyenletrendszernek egész megoldása ($x=\pm 2$, $y=\pm 5$).

*Megjegyzés.* Nagyon sok versenyző az (1) egyenlethez eljutva, minden egyéb megfontolás nélkül közölte, hogy ha a bal és a jobb oldalon a szorzatok egyenlők, akkor a kisebbik tényező kisebbikkel, a nagyobb pedig a nagyobbal lesz egyenlő. Ez azonban egyáltalán nincs így általában egy $p$ prímszám és $x$, $y$ egészek esetén (pl. $p=17$, $x=15$, $y=19$). Így többen hiába kaptak helyes eredményt, dolgozatukra csak részpontszámot adhattunk.