Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt, azt kapjuk, hogy

$$79x^2 + 79y^2 - 79 = 0,$$

azaz

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{1}$$

Most adjuk össze az eredeti egyenleteket:

$$117x^2 + 117y^2 + 2ax + 2by + 117 = 0;$$

(1)-et behelyettesítve

$$ax + by = -117. \tag{2}$$

Az eredeti egyenletnek ugyanakkor lesz közös megoldásuk, amikor (1)-nek és (2)-nek.

Nézzük meg először azt az esetet, ha $a = 0$.

Ekkor (2) miatt $b \neq 0$, tehát $y = -\frac{117}{b}$. (1) miatt viszont $y^2 \leq 1$, tehát $b^2 \geq 117^2$ kell, hogy teljesüljön ($b \geq 117$ vagy $b \leq -117$), ekkor (1)-nek és (2)-nek mindig lesz közös megoldása.

Abban az esetben, ha $a \neq 0$, (2)-ből $x = \frac{-117 - by}{a}$, és ezt (1)-be helyettesítve, majd $a^2 (> 0)$-val beszorozva és rendezve, az

$$(a^2 + b^2)y^2 + (2 \cdot 117 \cdot b)y + (117^2 - a^2) = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek főegyütthatója, $a^2 + b^2 > 0$. Ennek pontosan akkor lesz megoldása, ha diszkriminánsa nagyobb vagy egyenlő nullánál, azaz

$$4\left(117^2 b^2 - (a^2 + b^2)(117^2 - a^2)\right) \geq 0$$

Ezt az egyenlőtlenséget rendezve, majd $a^2 > 0$-val elosztva kapjuk, hogy

$$a^2 + b^2 \geq 117^2. \tag{3}$$

Ez a feltétel magában foglalja az $a = 0$ esetben kapottat is, így (1)-nek és (2)-nak, tehát az eredeti egyenletrendszernek is pontosan akkor van megoldása, ha (3) teljesül, vagyis mindazokra az $(a,\ b)$ számpárokra a síkon, amelyek az origó középpontú, 117 egység sugarú körvonalon és azon kívül vannak.

Tóth Ágnes (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Némi koordinátageometriai ismeretet feltételezve látható, hogy az (1), (2) egyenletekből álló rendszer megoldhatósága azt jelenti, hogy a (2) egyenletű egyenes metszi vagy érinti az origó körüli egységsugarú kört.

Az egyenes távolsága az origótól $\frac{117}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, így akkor és csak akkor kapunk közös pontot, ha ez a távolság nem nagyobb, mint 1, a kör sugara, azaz $117^2 \leq a^2 + b^2$.