I. megoldás. Az (1) kifejezésben egyik tört nevezője sem lehet 0-val egyenlő, így $x^2-y^2\neq 1$. Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\frac{x}{y}=\frac{(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}+1}{(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}-1},$$
$$x(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}-x=y(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}+y,$$
$$(x-y)(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}=x+y,$$
$$(x-y)^x(x^2-y^2)^y=(x+y)^x,$$
$$(x-y)^x(x-y)^y(x+y)^y=(x+y)^x,$$
$$(x-y)^{x+y}=(x+y)^{x-y}.$$

Vezessük be az $a=x+y$ és $b=x-y$ jelöléseket. Ekkor $b^a=a^b$, ahol $a>b$, mivel y pozitív. Az a-val együtt b is pozitív, mert $a=x+y>0$, és ha b negatív lenne, akkor a bal oldal abszolút értéke nagyobb volna 1-nél, míg a jobb oldal abszolút értéke kisebb. Ha $b=0$, akkor $x=y$ miatt $\frac{x}{y}\neq\frac{(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}+1}{(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}-1}$.

Legyen $(a,\ b)=d$. Ekkor léteznek olyan a_1, b_1 pozitív egészek, amelyekre $a=a_1d$, $b=b_1d$ és $(a_1,\ b_1)=1$. Azaz $(db_1)^{da_1}=(da_1)^{db_1}$.
Mivel a_1, b_1, d_1 pozitív egészek: $d^{a_1}\cdot b_1^{a_1}=d^{b_1}\cdot a_1^{b_1}$. $a>b$ alapján $a_1>b_1$. Tehát

$$d^{a_1-b_1}b_1^{a_1}=a_1^{b_1}.$$

Mindkét oldalon pozitív egészek állnak és $(a_1,\ b_1)=1$, vagyis az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $b_1=1$. Így $d^{a_1-1}=a_1$, ahol $d\neq 1$, ugyanis az ellenkező esetben $a=b=1$, de mint tudjuk, $a>b$. Feltehető tehát, hogy $d\geq 2$. Használjuk fel a következő becslést:

$$d^{a_1-a}\geq 2^{a_1-1}\geq a_1.$$

Ebből $d=2$ azonnal adódik. $2^{a_1-1}=a_1$ könnyen ellenőrizhetően akkor áll fenn, ha a_1 értéke 1 vagy 2. Ha $a_1=1$, úgy $a=b=2$, ami nem megoldása a feladatnak. Ha $a_1=2$, úgy $a=4$ és $b=2$, amiből $x=3$ és $y=1$ következik. Ezek kielégítik a feladat feltételeit. Tehát az egyedüli megoldás $x=3$ és $y=1$.

Léka Zoltán (Makó, József Attila Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Akárcsak az előző megoldásban, most is az $a^b=b^a$ egyenletre vezetjük vissza a feladatot. Ebből:

$$\sqrt[a]{a}=\sqrt[b]{b}.$$

A kérdést tehát a következőképpen fogalmazhatjuk át: Létezik-e pozitív egészeken értelmezett $n\to\sqrt[n]{n}$ függvénynek két olyan értéke, amelyek egyenlők egymással? Ha $n\geq 5$, akkor $\sqrt[n]{n}>1$ és a függvény szigorúan monoton csökken, hiszen

$$n\geq 4>e=2,71\dots>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\qquad\text{miatt}\qquad n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Így $n^{n+1}>(n+1)^n$, tehát $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$.

Ezek szerint, ha $n\geq 5$, akkor a függvény összes értéke különböző, és

$$1<\sqrt[n]{n}\leq\sqrt[5]{5}<\min\{\sqrt[n]{n}\ :\ n\in\{2,\ 3,\ 4\}\}.$$

$1\leq n\leq 4$ esetén $\sqrt[4]{4}=\sqrt[2]{2}$ adódik, amiből egyedüli megoldásként $x=3$ és $y=1$.

Zombori Tamás (Budapest, Toldy F. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján