I. megoldás. Legyen $a=x+y$, $b=z+x$, $c=y+z$. Ekkor $x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}$, $x=\dfrac{-a+b+c}{2}$, $y=\dfrac{a-b+x}{2}$, $z=\dfrac{a+b-c}{2}$, a feladat kérdése pedig a következőképpen módosul: milyen m értékek mellett osztható a

$$p(a,\ b,\ c)=\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)^m+\left(\frac{a-b+c}{2}\right)^m+\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^m-\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^m$$

polinom abc-vel.

A zárójeleket felbontva, a polinomiális tétel szerint adódik, hogy

$$p(a,\ b,\ c)=\frac{1}{2^m}\Bigg[\sum_{p+q+r=m}\frac{m!}{p!q!r!}(-a)^pb^qc^r+\sum_{p+q+r=m}\frac{m!}{p!q!r!}a^p(-b)^qc^r+$$
$$+\sum_{p+q+r=m}\frac{m!}{p!q!r!}a^pb^q(-c)^r-\sum_{p+q+r=mp!q!r!}\frac{m!}{p!q!r!}a^pb^qc^r\Bigg]$$

Ebben a polinomban az abc-vel való oszthatóság szempontjából elég azokat a tagokat tekinteni, ahol a p, q, r kitevők valamelyike 0. Nézzük mondjuk azoknak a tagoknak az összegét, ahol $r=0$:

$$\frac{1}{2^m}\Bigg[\sum_{p+q=m}\frac{m!}{p!q!}(-a)^pb^q+\sum_{p+q=m}\frac{m!}{p!q!}a^p(-b)^q+\sum_{p+q=m}\frac{m!}{p!q!}a^pb^q-\sum_{p+q=m}\frac{m!}{p!q!}a^pb^q\Bigg]=$$
$$=\frac{1}{2^m}\Bigg[\sum_{p+q=m}\frac{m!}{p!q!}(-a)^pb^q+\sum_{p+q=m}\frac{m!}{p!q!}a^p(-b)^q\Bigg].$$

A binomiális tétel szerint ez éppen

$$\frac{1}{2^m}[(b-a)^m+(a-b)^m].$$

Hasonló mondható el $p=0$ és $q=0$ esetén is. Így azon tagok összege, amelyekben p, q, r valamelyike (legalább egy és legfeljebb kettő) nulla:

$$\frac{1}{2^m}[(b-a)^m+(a-b)^m+(c-a)^m+(a-c)^m+(c-b)^m+(b-c)^m]-$$
$$-\frac{1}{2^m}[(a^m+b^m+c^m)-(a^m+b^m+c^m)].$$

Összefoglalva: az $x^m+y^m+z^m-(z+y+z)^m$ polinom akkor és csak akkor osztható az $(x+y)(y+z)(z+x)$ polinommal, ha a

$$(b-a)^m+(a-b)^m+(b-c)^m+(c-b)^m+(a-c)^m+(c-a)^m$$

polinom osztható abc-vel.

Ez végül pontosan akkor teljesül, ha m páratlan.

Megjegyzés. A megoldók többsége szimmetrikus polinomokat használt.

II. megoldás. Felhasználjuk, hogy a háromváltozós polinomok körében (is) teljesül a számelmélet alaptételének megfelelője. Ennek következményeként egy polinom pontosan akkor osztható $(y+z)(z+x)(x+y)$-nal, ha az $(y+z)$, $(z+x)$, $(x+y)$ tényezők bármelyikével osztható. Ezek ugyanis egymáshoz páronként relatív prímek, ami azt jelenti, hogy a nemnulla konstans polinomokon kívül nincs más közös osztójuk. A kifejezés szimmetrikus x, y, z-ben, így elegendő pl. az $(x+y)$-nal való oszthatóságot vizsgálni. Mivel

$$x^m+y^m+z^m-(x+y+z)^m=x^m+y^m-\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}(x+y)^iz^{m-i},$$

a kérdés x^m+y^m-nek az $(x+y)$-nal való oszthatóságára egyszerűsödik. Itt pedig

$$x^m+y^m=$$
$$=(x+y)\left(x^{m-1}-x^{m-2}y+x^{m-3}y^2-+\dots+(-1)^{m-1}y^{m-1}\right)+\left(y^m-(-1)^{m-1}y^m\right)$$

mutatja, hogy az oszthatóság akkor következik be, ha $y^m-(-1)^{m-1}y^m=(1+(-1)^m)y^m$ osztható $(x+y)$-nal, vagyis ha m páratlan.