Ha $n \geq 2$, akkor rögzítsük az n értékét, és tekintsük az alábbi sorozatot:

$$a_n = \sqrt{n}, \quad a_{n-1} = \sqrt{(n-1)\sqrt{n}} = \sqrt{(n-1)a_n}, \ \ldots, \ a_k = \sqrt{ka_{k+1}}, \ \ldots, \ a_2 = \sqrt{2a_3}.$$

A feladat kérdése az, hogy $a_2 < 3$ igaz-e. Általánosabban bizonyítjuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor $a_k < k+1$, ha $k = 2$, 3, $\ldots$, n.

Ezt $k = n$-ről indulva – ekkor $a_n = \sqrt{n} < n+1$ nyilvánvaló – a k csökkenő értékeire vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk, azaz megmutatjuk, hogy ha $a_k < k+1$, akkor $a_{k-1} < k$.

Valóban, $a_{k-1} = \sqrt{(k-1)a_k} < \sqrt{(k-1)(k+1)} = \sqrt{k^2-1} < \sqrt{k^2} = k$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Hartmann Miklós Bonyhád, Petőfi S. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzések. 1. *Biró Márton* (Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Koll., 10. o.t.) megmutatta, hogy ha a_1, a_2, $\ldots$, a_n pozitív tagú növekvő számtani sorozat, akkor

$$\sqrt{a_1\sqrt{a_2\ldots\sqrt{a_n}}} < a_2$$

minden n-re.

2. *Less Áron* (Miskolc, Földes F,. Gimn., 12. o.t.) a kitűzöttnél erősebb

$$\sqrt{2\sqrt{3}\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}} < 3^{\frac{-1}{2^{n-1}}}\left(3 - \frac{n-1}{2^{n-1}}\right)$$

állítást igazolta.