Alakítsuk át a feladat feltételeit:

$$3^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ, 4^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos 120^\circ, 5^2 = z^2 + x^2 - 2zx\cos 120^\circ.$$

Ha felveszünk egy ABC háromszöget $AB = 3$, $BC = 4$ és $AC = 5$ oldalakkal, akkor Pitagorasz tételének megfordítása alapján ez a háromszög derékszögű. Létezik tehát a P izogonális pontja. (P akkor és csak akkor izogonális pontja az ABC háromszögnek, ha $APB\sphericalangle = BPC\sphericalangle = CPA\sphericalangle = 120^\circ$.)

Vegyük észre, hogy ha $AP = x$, $BP = y$ és $CP = z$, akkor a három feltétel megegyezik az ABP, BCP és CAP háromszögekre felírt koszinusztételekkel. Mivel azonos koszinusztételek csak egybevágó háromszögekre írhatók fel, és a fentiekben láttunk a háromszög létezésére egy példát, azért az egyenletrendszer megoldásai: AP, BP, CP. Ekkor:

$$\begin{aligned} 6 = \frac{3\cdot 4}{2} &= T_{ABC} = T_{APB} + T_{BPC} + T_{CPA} = \\ &= \frac{xy\sin 120^\circ}{2} + \frac{yz\sin 120^\circ}{2} + \frac{zx\sin 120^\circ}{2}. \end{aligned}$$

$\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ miatt tehát

$$xy + yz + zx = 8\sqrt{3}.$$

Gyenes Zoltán (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 10. o.t.) és *Horváth Gábor* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján