Először belátjuk, hogy $\cos x < \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, ha $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Mivel $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ esetén $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, azért

$$\cos x \cdot \sqrt{1+x^2} < \cos x \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1,$$

tehát valóban $\cos x < \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ezek után n-re vonatkozó indukcióval igazoljuk, hogy amennyiben $n \geq 1$, akkor $0 < a_n < 2 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n}}$.

$n = 1$ esetén: $0 < a_1 = \sin 1 \leq 1 < 2 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{1}} = 2$. $n = 2$-re $0 < \sin(\sin 1) < 2\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Legyen $k \geq 2$, és tegyük fel, hogy k-ig minden természetes számra igaz a fenti állítás.

Nyilván $\sin a_k < \sin 2 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{k}}$, mivel $a_k < 2\sqrt{\dfrac{1}{k}}$, a szinuszfüggvény szigorúan monoton növekvő a $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ intervallumban, végül $0 < a_k < 2 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{k}} < \dfrac{\pi}{2}$. Felhasználva a $\sin x < x$ és a $\cos x < \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy:

$$0 < a_{k+1} = \sin a_k < \sin 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{k}} = 2 \sin \sqrt{\frac{1}{k}} \cos \sqrt{\frac{1}{k}} < 2\sqrt{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Vagyis, ha $n = k$ esetén igaz az állítás, akkor $n = k+1$ esetén is. Így minden $n > 1$-re $0 < a_n < 2 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n}}$. Ebből $0 < na_n^2 < 4$, az na_n^2 sorozat tehát valóban korlátos.

Megjegyzések. 1. A megoldás során nem bizonyítottuk a $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ egyenlőtlenséget. Ez persze csak akkor áll fenn, ha $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Vegyük az egységsugarú kört és benne az x nagyságú középponti szöget.

Használjuk az *ábra* jelöléseit: az AB körív hossza x, $BB' = \sin x$, $AA' = \operatorname{tg} x$. Az AB körív hosszabb, mint az AB szakasz. Így $AB > BB'$ miatt $x > \sin x$. Az AOA' háromszög területe nagyobb, mint az AOB körcikk területe. Tehát:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{OA \cdot AA'}{2} > \frac{AO^2 \cdot AOB\sphericalangle}{2} = \frac{x}{2}.$$

Összefoglalva: $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

2. Körülményesebb úton a talált felső korlát javítható. Többen igazolták, hogy $0 < na_n^2 < 3$ is teljesül. *Hegedűs Péter* (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.) amellett, hogy bebizonyította az élesített egyenlőtlenséget, felhívta figyelmünket, hogy *Pólya György–Szegő Gábor:* Feladatok és tételek az analízis köréből I. című könyvében (Tankönyvkiadó, 1980) a II. fejezet 173. feladata szerint, ha $\sin x > 0$, akkor a $\sin_1 x = \sin x$, $\sin_n x = \sin(\sin_{n-1} x)$ iterációval megadott sorozatra

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} \sin_n x = 1.$$

Eszerint a feladatban megadott na_n^2 sorozat nemcsak korlátos, hanem konvergens is, és a határértéke 3. Ez pedig azt jelenti, hogy ez a felső korlát már nem javítható tovább.