

A definíció alapján számítsunk ki néhány további értéket:

$$a_4 = \max\{2 \cdot 2\} = 4, a_5 = \max\{2 \cdot 3, 3 \cdot 2\} = 6, a_6 = \max\{2 \cdot 4, 3 \cdot 3, 4 \cdot 2\} = 9, a_7 = \max\{2 \cdot 6, 3 \cdot 4, 4 \cdot 3, 6 \cdot 2\} = 12, a_8 = \max\{$$

... és így tovább. Ezek az eredmények azt sugallják, hogy  $n > 1$  esetében  $a_{n+3} = 3 \cdot a_n$  teljesül.\*<sup>0</sup>

Ezt  $n$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.  $n \in \{2, 3, 4, 5\}$  esetében a fenti számolások szerint igaz az állítás. Tegyük most fel, hogy az adott összefüggés igaz minden olyan  $k < n$  esetén, amelyre  $k > 2$ .

A sorozat definíciója szerint  $a_{n+3}$  az

$$A_{n+3} = \{a_2 \cdot a_{n+1}, a_3 \cdot a_n, \dots, a_{n-2} \cdot a_5, a_{n-1} \cdot a_4, a_n \cdot a_3, a_{n+1} \cdot a_2\}$$

halmazba eső számok maximuma. Az  $A_{n+3}$ -ba eső első  $n - 3$  szorzat második tényezőjének  $i$  indexe rendre  $n + 1, n, \dots, 5$ . Ezek mindegyike eleget tesz a  $4 < i < n + 3$  kikötésnek. Az indukciós feltétel szerint ezekre a szorzatokra  $a_d \cdot a_{n+3-d} = 3 \cdot (a_d \cdot a_{n-d})$  teljesül. Ezek a szorzatok pontosan az

$$A_n = \{a_2 \cdot a_{n-2}, a_3 \cdot a_{n-3}, \dots, a_{n-2} \cdot a_2\}$$

halmazba eső szorzatok háromszorosai.

A fennmaradó három szorzat:  $\{a_{n-1} \cdot a_4, a_n \cdot a_3, a_{n+1} \cdot a_2\}$ . Itt viszont az első tényezők mindegyikének az indexe legalább  $6 - 1 = 5$ . Ezekre alkalmazható az indukciós feltevés; vagyis ez nem más, mint az  $\{a_{n-4} \cdot a_4, a_{n-3} \cdot a_3, a_{n-2} \cdot a_2\}$  szorzatok háromszorosai. Ezek a szorzatok viszont már szerepelnek  $A_n$ -ben (hiszen  $n > 5$ ). Ezért az  $A_{n+3}$ -ba eső szorzatok pontosan az  $A_n$ -be eső szorzatok háromszorosai, azaz  $a_{n+3} = 3 \cdot a_n$  valóban igaz.

Mivel  $1998 = 3 \cdot 665 + 3$ , azért  $a_{1998} = 3^{665} \cdot 3 = 3^{666} \approx 579\,102 \cdot 10^{312}$ .

*Boros M. Mátyás* (Budapest, Veres Péter Gimn., 9. o.t.) megoldása alapján

*Megjegyzés.* Ez a sorozat nem egy „kitalált” képlet. Azok számára, akik valamit hallottak már csoportelméletről, elmondjuk, hogy  $a_n$ -re való rekurzió azt mondja meg, hogy miképpen határozhatjuk meg az  $n$ -elemű halmaz összes permutációjának csoportjában a maximális méretű kommutatív részcsoport elemszámát; amennyiben ezt kevesebb elemű halmazok esetében már tudjuk.

---

<sup>0</sup> Az  $a_8$  kiszámítására azért volt külön szükség, mert 8 a legnagyobb index, amelyre a szorzatok között szerepel 3-mal nem osztható; ami a teljes indukciós bizonyításban esetszétválasztást tenne szükségessé.