Jelöljük g középpontját O-val, sugarát r-rel, a h_i húr ($i = 1, 2, 3$) végpontját A_i-vel és B_i-vel, felezőpontját F_i-vel, a húrpárok által meghatározott síkokkal a gömbből kimetszett körök középpontjait pedig O_1, O_2 és O_3-mal (lásd az *ábrát*).

Tudjuk, hogy egy kör/gömb húrjának felezőmerőleges egyenese/síkja átmegy a kör/gömb középpontján. Mivel h_1, h_2 és h_3 páronként egymásra merőlegesek, ezért ebből következik, hogy az $OO_2F_1O_3O_1F_3PF_2$ test téglatest. Ebben OP testátló, tehát

$$OP^2 = OO_1^2 + OO_2^2 + OO_3^2. \tag{1}$$

A feladatban szereplő három kis kör területének összege

$$O_2A_1^2 \cdot \pi + O_3A_2^2\pi + O_1A_3^2\pi. \tag{2}$$

Viszont az OO_i egyenesek merőlegesek e körök síkjaira, ezért Pitagorasz tétele szerint

$$OO_2^2 + O_2A_1^2 = OA_1^2, \qquad OO_3^2 + O_3A_2^2 = OA_2^2 \quad \text{és} \quad OO_1^2 + O_1A_3^2 = OA_3^2.$$

Mivel $OA_i = r$, ezért ezekből az egyenletekből és (1)-ből kapjuk, hogy

$$O_2A_1^2 + O_3A_2^2 + O_1A_3^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2 - (OO_2^2 + OO_3^2 + OO_1^2) = 3r^2 - OP^2. \tag{3}$$

A három kör területösszege (2) és (3) szerint $(3r^2 - OP^2) \cdot \pi$, ami állandó, mert r is és OP is állandó.

Kis-Tóth Ágnes (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján