Hajtsuk végre a következő átalakításokat:

$$(3a^2+32b^2)\cdot 97=(3a^2+96\cdot 32b^2)+(96\cdot 3a^2+32b^2)=$$
$$=3(a^2+32^2b^2+2\cdot 32ab)+32(3^2a^2+b^2-2\cdot 3ab)=3(a+32b)^2+32(3a-b)^2.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Mások a $3(a-32b)^2+32(3a+b)^2$ felbontást alkalmazták. A fenti ötlettel belátható, hogy általában egy ka^2+mb^2 alakú szám $(km+x^2)$-szerese ugyancsak felírható ka^2+mb^2 alakban. Az is nyilvánvaló, hogy az x^2-szerese is. Sőt, az alábbi átalakításokkal beláthatjuk, hogy ha k négyzetszám és osztója m-nek, akkor a (kx^2+my^2)-szerese is: (x, y tetszőleges pozitív egészek)

$$(ka^2+mb^2)(kx^2+my^2)=$$
$$(k^2a^2x^2+m^2b^2y^2+2kmabxy)+(kma^2y^2+kmb^2x^2-2kmabxy)=$$
$$=k\left(\sqrt{k}ax+\frac{m}{\sqrt{k}}by\right)^2+m\left(\sqrt{k}ay-\sqrt{k}bx\right)^2.$$

(Az idei Nemzetközi Magyar Matematikaverseny kilencedik évfolyamos feladata volt bizonyítani ezt $k=1$ és $m=2$-re.) Nyitott még a kérdés, hogy vajon van-e olyan k és m, amelyre létezik megfelelő szorzó, amelyik nem áll elő a fenti három formula egyikével sem (beleszámítva a lehetséges kombinációkat, pl. a $z^2(km+x^2)$-szeres számokat is), semmilyen x-szel és y-nal.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.)