

Megpróbálunk minél nagyobb részhalmazt kiválasztani úgy, hogy semelyik két elem összege ne legyen 2-hatvány, és megmutatjuk, hogy ez a részhalmaz nem lehet ezer- vagy többemű.

Az nyilvánvaló, hogy a részhalmaznak nem lehet eleme egyetlen 2-hatvány sem, mert akkor a -nak és b -nek is azt választva az $a + b$ összeg is 2-hatvány lesz. Képezzük most a következő számpárokat:

1. (50, 1998); (51, 1997); ...; (1023, 1025) – ez 974 pár.
2. (15, 49); (16, 48); ...; (31, 33) – ez 17 pár.
3. (2, 14); (3, 13); ...; (7, 9) – ez 6 pár.

Ezzel minden számot párokba soroltuk, kivéve néhány 2-hatványt (1024, 32, 8, 1), mert azok nem lehetnek a részhalmaz elemei, valamint a nullát. (Könnyen meggyőződhetünk, hogy minden számot besoroltunk valahová, mert $2(974 + 17 + 6) + 4 + 1 = 1999$.) Látható, hogy az egy párba sorolt számok összege 2-hatvány: 2048, 64, illetve 16. Emiatt egy párból egyszerre csak egy szám lehet a részhalmazunkban. Így a H elemszámának maximuma, beleszámítva a nullát is: $974 + 17 + 6 + 1 = 998 < 1000$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.)