

I. megoldás. A háromszög területe a szokásos jelölésekkel $t = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2}$. Mivel $m_a \geq a$ és $m_b \geq b$, $t \geq \frac{a^2}{2}$ és $t \geq \frac{b^2}{2}$. Ezért $\frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} \geq \frac{a^2}{2}$ és $\frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} \geq \frac{b^2}{2}$. Mivel a, b pozitív számok, azt nyerjük, hogy $\sin \gamma \geq \frac{a}{b}$ és $\sin \gamma \geq \frac{b}{a}$. Ezekből következik, hogy $\sin \gamma \geq 1$, ami csak úgy lehetséges, ha $\sin \gamma = 1$, vagyis $\gamma = 90^\circ$.

Derékszögű háromszögben az egyik befogóhoz tartozó magasság a másik befogó, ezért a feltételek szerint $b \geq a$ és $a \geq b$, ahonnan $a = b$ következik.

Tehát a háromszög derékszögű és egyenlő szárú, így a szögei: $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

Zalán Péter (Budapesti Evangélikus Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. *Ábránkon* az a két magasság, amelyekről a két feltétel szól, m_a , illetve m_b . A feltételek szerint $m_a \geq a$ és $m_b \geq b$. Írjuk fel az ANC és BMC háromszögekre a Pitagorasz-tételt, és használjuk föl a feltételeket:

$$\begin{aligned} m_a^2 + NC^2 &= b^2 \leq m_b^2; \\ m_b^2 + MC^2 &= a^2 \leq m_a^2. \end{aligned}$$

Ezek az összefüggések természetesen elfajuló ANC és BMC háromszögekre is teljesülnek. Adjuk össze a kapott egyenlőtlenségeket:

$$m_a^2 + NC^2 + m_b^2 + MC^2 \leq m_b^2 + m_a^2,$$

amiből következik: $NC^2 + MC^2 \leq 0$. Ez pontosan akkor lehetséges, ha $NC = MC = 0$, és így $\gamma = 90^\circ$, továbbá $m_a = b$ és $m_b = a$. Ezért a feltételeket figyelembe véve $b \geq a$ és $a \geq b$, amiből $a = b$. A háromszög tehát derékszögű és egyenlő szárú, ezért a szögei: $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

Breuer János (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 9. o.t.)

