

Használjuk az *ábra* jelöléseit. Legyen  $AG$  az a testátló, ami körül forgatunk, ennek felezőpontja legyen  $O$ , a  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  pontok pedig a  $DC$ ,  $CB$ ,  $BF$  élek felezőpontjai. Az  $O$  pontra a kocka középpontosan szimmetrikus, ebben a szimmetriában a  $P$  pont  $P'$  képe az  $EF$  él felezőpontja. Hasonlóan származtathatók a  $Q'$  és  $R'$  pontok. Megmutatjuk, hogy az  $AG$  körüli  $+60^\circ$ -os forgatás során  $P$  képe  $Q$ ,  $Q$  képe  $R$ ,  $R$  képe  $P'$  és így tovább. Először belátjuk, hogy  $PO \perp AG$ . Ehhez kiszámítjuk a  $PO$ ,  $OA$  és  $AP$  szakaszok hosszát:  $PO = \frac{1}{2}PP' = \frac{1}{2}ED = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $OA = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $AP = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$ . Mivel  $PO^2 + OA^2 = AP^2$ , a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint  $\angle POA = 90^\circ$ .

Hasonlóan belátható, hogy  $QO$  és  $RO$  is merőleges  $AG$ -re. Már láttuk, hogy  $PO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ugyanúgy  $QO = PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , tehát a  $PQO$  háromszög szabályos. Most már következik, hogy  $P$  képe az  $AG$  körüli  $+60^\circ$ -os elforgatásban  $Q$ . Ugyanígy kapjuk, hogy  $Q$  képe  $R$ ,  $R$  képe  $P'$  és így tovább.

Nézzük meg azután, mi lesz az  $ABCD$  lap elforgatottja. Ennek a lapnak  $A$ ,  $P$ ,  $Q$  három nem egy egyenesen lévő pontja, ezért a lap síkjának képét a három képpont, vagyis  $A$ ,  $Q$ ,  $R$  meghatározza. Az  $A$ ,  $Q$ ,  $R$  pontok síkja lemetszi a kockából az  $AQRB$  gúlát. Hasonlóan megmutatható, hogy az  $A$  csúcsra illeszkedő másik két lap, illetve a  $G$  csúcsra illeszkedő három lap elforgatottja az  $AQRB$  gúlával egybevágó gúákat vág le a kockából. Egy ilyen gúla térfogata  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}$ , ezért a közös rész térfogata  $1 - 6 \cdot \frac{1}{24} = \frac{3}{4}$ .

*Balogh Attila* (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., 11. o.t.)

*Megjegyzés.* A közös rész térfogata úgy is kiszámítható, hogy meghatározzuk a

$$PQRP'Q'R'$$

alapú  $A$  vagy  $G$  csúcsú gúla térfogatát, és ezt kétszer vesszük.

