Ha $a = b$, akkor az egyenlőtlenség: $0 \leq 0 \leq 0$ teljesül. A továbbiakban feltesszük, hogy $a \neq b$, azaz $a - b \neq 0$. Az egyenlőtlenség-lánc középső tagját a $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ azonosság alapján átalakítva:

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leq \frac{\frac{a^2+b^2}{2} - ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} \leq \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)},$$

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leq \frac{\frac{(a-b)^2}{2}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} \leq \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)}.$$

Mivel $(a-b)^2 > 0$, azért az egyenlőtlenségeket eloszthatjuk vele:

$$\frac{1}{2(a+b)} \leq \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}(a+b)}.$$

Ezzel egyenértékű:

$$2(a+b) \geq 2\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}\right) \geq \sqrt{2}(a+b).$$

Négyzetre emelve:

$$4(a+b)^2 \geq 4\left(\frac{a^2+b^2}{2} + ab + 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{ab}\right) \geq 2(a+b)^2, 2(a+b)^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab + 4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{ab} \geq (a+b)^2.$$

Mindenhonnan kivonva $(a+b)^2$-t

$$(a+b)^2 \geq 4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{ab} \geq 0.$$

A második egyenlőtlenség biztosan teljesül, mert a és b pozitívak. Az elsőt négyzetreemeléssel tovább alakítva:

$$\begin{gathered}
(a+b)^4 \geq 16\frac{a^2+b^2}{2} \cdot ab, \\
a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \geq 8a^3b + 8ab^3, \\
a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \geq 0, \\
(a-b)^4 \geq 0.
\end{gathered}$$

Ez mindenképpen teljesül, és csak ekvivalens átalakításokat végeztünk (hiszen végig pozitív mennyiségekről volt szó, ahol a négyzetre emelés kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés); így az állítást bebizonyítottuk.

Vitéz Ildikó (Miskolc, Földes F. Gimn., 10. o.t.)