Ismert, hogy egy háromszög ugyanazon csúcsához tartozó belső és külső szögfelező egyenesek merőlegesek egymásra (*ábra*). Ezért Pitagorasz tételéből következik, hogy egy háromszög egyik csúcsából egy másik csúcshoz tartozó külső és belső szögfelezőkre bocsátott merőleges szakaszok négyzetének összege megegyezik a két csúcsot összekötő oldal négyzetével. Vagyis a bizonyítandó állításunk

$$6(SA^2+SB^2+SC^2)=2(AB^2+BC^2+CA^2)$$

alakba írható.
Legyen $\overrightarrow{SA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{SB}=\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{SC}=\mathbf{c}$. Tudjuk, hogy ekkor $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$. Ezért $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=0$, azaz

$$\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2=-2(\mathbf{ab}+\mathbf{bc}+\mathbf{ca}). \tag{1}$$

Másrészt viszont $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$, tehát $AB^2=\mathbf{b}^2+\mathbf{a}^2-2\mathbf{ab}$; és hasonlóképpen $BC^2=\mathbf{c}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{bc}$, $CA^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{c}^2-2\mathbf{ac}$. Ezeket összeadva:

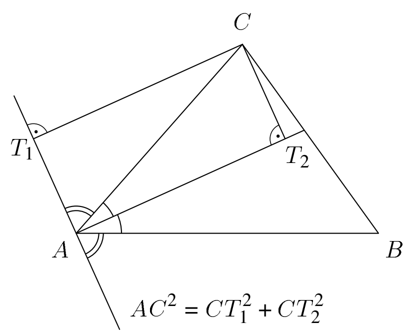
$$AB^2+BC^2+CA^2=2(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2)-2(\mathbf{ab}+\mathbf{bc}+\mathbf{ca}).$$

Vagyis (1)-et felhasználva:

$$AB^2+BC^2+CA^2=3(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2)=3(SA^2+SB^2+SC^2).$$

Ezt 2-vel szorozva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 11. o.t.) dolgozata alapján



$AC^2=CT_1^2+CT_2^2$